

# Peatükk 4

## Deformeeruva keskkonna dünaamika

Dünaamika on mehaanika osa, mis uurib materiaalsete keskkondade liikumist välismõjude (välisjõudude) toimel. Uuritavaks materiaalseks keskkonnaks võib olla nii tahke keha, gaas kui vedelik. Üheks vaadeldavaid materiaalseid keskkondi iseloomustavaks suuruseks on *inerts*. Inertsiooni mõõduks on mass.

---

### 4.1. Mass

4 - 2

## 4.1 Mass

*Mass* on positiivne suurus, mis on invariantne liikumise suhtes. Tema dimensioon  $M$  ei sõltu ei pikkuse dimensioonist  $L$  ega aja dimensioonist  $T$ . Kui mass on absoluutselt pidev, siis leidub funktsioon  $\rho$ , mida nimetatakse *massi tiheduseks*. Sel juhul keha kogumass

$$\mathfrak{M} = \int_v \rho dv. \quad (4.1)$$

Kui mass pole pidev üle kogu ruumala  $v$ , siis

$$\mathfrak{M} = \int_{v_1} \rho dv + \sum_{\alpha} \mathfrak{M}_{\alpha}, \quad (4.2)$$

kus  $v_1$  on pideva massijaotusega piirkond.

Edaspidi vaatleme vaid pideva massijaotusega keskkondi, st., et igas (elementaar)mahus on etteantud massi tihedus ning kui  $v \rightarrow 0$ , siis  $\mathfrak{M} \rightarrow 0$  — seega  $0 < \rho < \infty$ .

**Pideva keskkonna mehanika I põhiaksioom** — massi jäävuse seadus  
**Globaalne massi jäävuse aksioom:** keskkonna kogumass on liikumisel invariantne —

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_0 d\mathcal{V} = \int_v \rho dv. \quad (4.3)$$

Kuna  $dv = j d\mathcal{V}$ , kus

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X^K} \right| = \sqrt{\text{III}_C} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}},$$

siis saab viimase võrduse esitada nii LK-s kui EK-s —

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho_0 - \rho j) d\mathcal{V} = 0 \quad \text{või} \quad \int_v (\rho - \rho_0 j^{-1}) dv = 0. \quad (4.4)$$

**Lokaalse massi jäävuse aksioomi** saame kui rakendamme globaalset massi jäävuse aksioomi materiaalse punkti lõpmata väikeses ümbruses. Valemite (4.4) põhjal saame

$$\rho_0 = \rho j = \rho \sqrt{\text{III}_C} \quad \text{või} \quad \rho = \rho_0 j^{-1} = \rho_0 \sqrt{\text{III}_c}. \quad (4.5)$$

Avaldisi (4.5) nimetatakse *materiaalseteks pidevusvõrranditeks* ja nad esitatakse Lagrange'i koordinaatides (Lagrange'i kirjeldus).

#### 4.1. Mass

#### 4 - 4

Ruumilise pidevusvõrrandi (Euleri kirjeldus) saame kui esitamme globaalset massi jäävuse aksioomi kujul

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho dv = \int_v \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} \right] dv = 0. \quad (4.6)$$

Viimase põhjal avaldub lokaalne massi jäävuse aksioom kujul

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0, \quad (4.7)$$

mis kujutabki endast *ruumilist pidevusvõrrandit*.

Avaldised (4.5) ja (4.7) esitavad tiheduse ja sama nähtuse kaht erinevat kirjeldust — (4.5) on mugavam kasutada tahke keha mehanikas, (4.7) aga vedelike ja gaaside puhul.

## 4.2 Liikumishulk, kineetiline moment, energia

Keha (mahus  $v$  sisalduva massi  $\mathfrak{M}$ ) *liikumishulk*<sup>1</sup>  $\mathcal{P}$  on defineeritud kujul

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v} d\mathfrak{M}. \quad (4.8)$$

Euleri ja Lagrange koordinaatides avaldub liikumishulk vastavalt kujul

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{i}_k \int_{\mathfrak{M}} v_k(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} \quad \text{ja} \quad \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I}_K \int_{\mathfrak{M}} V_K(\mathbf{X}, t) d\mathfrak{M}, \quad (4.9)$$

kusjuures baasivektorid  $\mathbf{i}_k$  ja  $\mathbf{I}_K$  saab integraali ette tuua vaid seetõttu, et me kasutame sirgjoonelisi koordinaate. Kuna pideva massijaotuse puhul  $d\mathfrak{M} = \rho d\upsilon$ , siis pole oluline, kas integreeritakse üle ruumala või massi. On selge, et liikumishulga  $\mathcal{P}$  komponendid

$$\mathcal{P}_k(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathfrak{M}} v_k(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} \quad \text{ja} \quad \mathcal{P}_K(\mathbf{X}, t) = \int_{\mathfrak{M}} V_K(\mathbf{X}, t) d\mathfrak{M}. \quad (4.10)$$

<sup>1</sup>I.k. *momentum or linear momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka terminit impulss.

### 4.2. Liikumishulk, kineetiline moment, energia

Keha (mahus  $v$  sisalduva massi  $\mathfrak{M}$ ) *kineetiline moment*<sup>2</sup>  $\mathcal{H}_o$  ruumipunkti  $o$  suhtes

$$\mathcal{H}_o \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \mathbf{i}_k \int_{\mathfrak{M}} e_{klm} x_l v_m d\mathfrak{M}, \quad (4.11)$$

kus  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  on elementaarmassile  $d\mathfrak{M}$  vastav kohavektor. Analoo-giliselt eelnevaga saame ka kineetilise momenti komponendid esitada nii EK-s kui LK-s<sup>3</sup> —

$$\mathcal{H}_k^o = \int_{\mathfrak{M}} e_{klm} x_l v_m d\mathfrak{M}, \quad \mathcal{H}_K^o = \delta_{Kk} \int_{\mathfrak{M}} e_{klm} x_l v_m d\mathfrak{M}. \quad (4.12)$$

Lisaks saab kineetilise momenti avaldada ka bivectori kujul

$$\mathcal{H}_{ki}^o = \int_{\mathfrak{M}} (x_k v_l - x_l v_k) d\mathfrak{M}, \quad \mathcal{H}_{KL}^o = \delta_{Kk} \delta_{Ll} \int_{\mathfrak{M}} (x_k v_l - x_l v_k) d\mathfrak{M}. \quad (4.13)$$

<sup>2</sup>I.k. *moment of momentum or angular momentum*. Eesti keeles kasutatakse ka termineid impulsi moment ja pöördimpulss.

<sup>3</sup>Siin  $\mathcal{H}_o = \mathcal{H}_K^o \mathbf{I}_K = \mathcal{H}_k^o \mathbf{i}_k$

Pideva keskkonna mehanika II põhiaksioom — liikumishulga tasakaalu seadus<sup>4</sup>

Liikumishulga muutumise kiirus võrdub kehale (keskkonnale) mõjuvate jõudude peavektoriga<sup>5</sup> —

$$\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{F} \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} v_k d\mathfrak{M} = \mathcal{F}_k \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \delta_{Kk} v_k d\mathfrak{M} = \mathcal{F}_K. \quad (4.14)$$

<sup>4</sup>Ik. principle of balance of momentum

<sup>5</sup>Siin ja edaspidi võib nii Kroneckeri deltad kui permutatsioonisümbolid tuua integraali ette.

#### 4.2. Liikumishulk, kineetiline moment, energia

Pideva keskkonna mehanika III põhiaksioom — kineetilise momendi tasakaalu seadus<sup>6</sup>

Kineetilise momendi muutumise kiirus võrdub kehale (keskkonnale) mõjuvate jõudude peamomendiga (mõlemad momendid peavad olema võetud ühe ja sama ruumipunkti suhtes)—

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}_o &= \mathcal{M}_o \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \delta_{Kk} e_{klm} x_l v_m d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_K^o \quad \text{ehk} \\ &\frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \delta_{Kk} \delta_{Ll} (x_k v_l - x_l v_k) d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_{KL}^o \quad \text{ehk} \\ &\frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} e_{klm} x_l v_m d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_k^o \quad \text{ehk} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} (x_k v_l - x_l v_k) d\mathfrak{M} = \mathcal{M}_{kl}^o. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Valenitega (4.14) ja (4.15) esitatud pideva keskkonna mehanika põhiaksioome nimetatatakse *Euleri liikumisseadusteks* ning nad kujutavad endast Newtoni seaduste laiendust punktmassilt keskkonnale.

<sup>6</sup>Ik. principle of balance of moment of momentum

Pideva keskkonna mehaanika IV põhiaksioom — energia jäävuse seadus<sup>7</sup>

Keha (mahus  $v$  sisalduva massi  $\mathfrak{M}$ ) *kineetiline energia*<sup>8</sup>

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} v^2 d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \delta_{kl} \int_{\mathfrak{M}} v_k v_l d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{M}} v_k v_k d\mathfrak{M}. \quad (4.16)$$

**Energia jäävuse seadus.** Kineetilise ja siseenergia summa muutumise kiirus võrdub välisjõudude töö ja keskkonda sisse tulnud või sealt lahkunud energiatega summa muutumise kiirusega —

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + \sum_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}. \quad (4.17)$$

Siin  $\mathcal{K}$  on kineetiline energia,  $\mathcal{E}$ — siseenergia,  $\mathcal{W}$ — välisjõudude töö ajatühikus ja  $\mathcal{U}_{\alpha}$ — ajatühikus muundunud energiatega mehaanikaline ekvivalent. *Seeja eeldame, et energiad on aditiivsed.*

Suurused  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{W}$  ja  $\mathcal{U}_{\alpha}$  on selgelt määratletavad, siseenergia  $\mathcal{E}$  on aga

<sup>7</sup>I. k. principle of conservation of energy  
<sup>8</sup>I.k. kinetic energy

4.2. Liikumishulk, kineetiline moment, energia

4 - 10

ebamäärasem ja teda võib vaadelda kui võrrandi (4.17) tasakaalustavat liiget. Ta on nn. oleku funktsioon ja sõltub olekut väljendavatest muutujatest<sup>9</sup>.

Kui on teada siseenergia tihedus  $\varepsilon$  (tihikmassi kohta), siis

$$\mathcal{E} = \int_{\mathfrak{M}} \varepsilon d\mathfrak{M} \equiv \int_v \rho \varepsilon dv. \quad (4.18)$$

<sup>9</sup>I.k. constitutive variables

## 4.3 Pinge

### 4.3.1 Sise- ja välisjõud

Materiaalne keha deformeerub sise- ja välisjõudude<sup>10</sup> toimel. Jõudude päritolu võib olla väga mitmesugune — mehaanikaline, elektriline, keemiline jne. jne. Punktmassi ja jäiga keha mehaanikas vaadeldakse jõudusid, mis võivad sõltuda vaid ajast, punkti asukohast ja kiirusest, st.,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{p}, \mathbf{v}, t)$ . Pideva keskkonna mehaanikas me sellist piirangut ei sea ja jõud võib sõltuda lisaks eeltoodule ka näiteks deformatsioonigradiendist, kõrgemat järku tuletistest aja järgi, elektromagnetilistest muutujatest jne. Klassikalises mehaanikas jõudu tavaliselt väga täpselt ei defineerita. Staatika ja dünaamika kursustes jaotatakse jõud tavaliselt sise- ja välisjõududeks. Pideva keskkonna vaatepunktist lähtudes võib jõud jagada kolme kategooriasse.

---

<sup>10</sup>I.k. *internal and external loads*

### 4.3. Pinge

### 4 - 12

1. *Välised mahu- ehk massijõud*<sup>11</sup> mõjuvad keha või keskkonda moodustavatele materiaalsetele punktidetele (masspunktidele). Näiteks gravitatsiooni jõud või elektrostaatilised jõud. Summaarne jõud saadakse integreerimisel üle kogu ruumala  $v$ . Siin eeldatakse, et on teada jõe tihedus ühikmassi või ühikruumala kohta.
2. *Välised pinn- ehk kontaktjõud*<sup>12</sup> on põhjustatud teiste kehade või keskkondade mõjust kokkupuutepinnal. Siin eeldatakse, et on teada pinnahikule mõjuv jõud. Näiteks hüdrostaatilise rõhu mõju vette asetatud keha pinnale.
3. *Sisejõud*<sup>13</sup> on põhjustatud vaadeldavat keha moodustavate materiaalse-te punktide omavahelisest mõjust. Newtoni III seaduse põhjal mõjutavad kaks masspunkti teineteist võrdvastupidiste jõududega — seega on kõigi sisejõudude summa null. Dünaamika kursuses näidati, et ka kõigi sisejõudude peamoment on null. Punktmasside vahelised jõud (sisejõud) muutuvad pinnajõududeks kui me isoleerime (mõtteliselt) keskkonna või keha ühe osa ülejäänust. See annab pingehüpoteesi, mida vaatleme järgmises alajaotuses.

---

<sup>11</sup>I.k. *extrinsic volume loads or extrinsic body loads*

<sup>12</sup>I.k. *extrinsic surface loads or contact loads*

<sup>13</sup>I.k. *mutual or internal loads*

Allpool kasutame välisjõudude ja -momentide jaoks järgmisi tähistusi:

$\mathbf{f}$  — massijõud (jõud massiühiku kohta),

$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  — pinnajõud (jõud pinnaihiku kohta vaadeldavat punkti läbival pinnal normaaliga  $\mathbf{n}$ ),

$\mathcal{F}_\alpha$  — punktis  $\mathbf{p}_\alpha$  mõjuv koondatud jõud,

$\mathbf{m}$  — massimoment (moment massiühiku kohta),

$\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$  — pinnamoment (moment pinnaihiku kohta vaadeldavat punkti läbival pinnal normaaliga  $\mathbf{n}$ ),

$\mathcal{M}_\alpha$  — punktis  $\mathbf{p}_\alpha$  mõjuv jõupaari moment.

Seega, kehale mõjuva jõusüsteemi peavektor

$$\mathcal{F} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da + \sum_\alpha \mathcal{F}_\alpha \quad (4.19)$$

### 4.3. Pinge

### 4 - 14

ja peamoment

$$\mathcal{M}_o = \int_{\mathfrak{M}} [\mathbf{m} + \mathbf{p} \times \mathbf{f}] d\mathfrak{M} + \int_s [\mathbf{m}_{(\mathbf{n})} + \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}] da + \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha \times \mathcal{F}_\alpha + \sum_\beta \mathcal{M}_\beta. \quad (4.20)$$

**Märkused:**

- Koondatud jõudusid defineeritakse tihti kui piirjuhte pinnal või mahujõududest. Selline käsitlus võib aga mõnikord põhjustada matemaatilisi raskusi ning vajab seetõttu täiendavate tingimuste kasutamist. Näiteks, et vältida määramatusi rakendatakse lokaalseid teoreeme ja printsiipe vaid punktides, kus ei mõju koondatud jõudusid. Globaalsete teoreemide puhul sellist probleemi pole.

- Tavatingimuste ja -keskkondade korral on pinnal- ja mahumomentide ekvivalentne üldjuhul tüüpiline harukordne.

Eeltoodust lähtudes vaadeldakse antud kursuses edaspidi eeskätt vaid jaotatud jõudusid (massijõudusid ja pinnajõudusid) ja nende põhjustatud momente.

Teisisõnu, reeglina esitatakse jõusüsteemi peavektor kujul

$$\mathcal{F} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da \quad (4.21)$$

ja peamoment kujul

$$\mathcal{M}_o = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da. \quad (4.22)$$

Arvestades avaldisi (4.21) ja (4.22) saavad liikumishulga ja kineetilise momendi globaalse tasakaalu seadused (4.14) ja (4.15) kuju

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}} &\stackrel{(4.8)}{=} \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} = \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da, \\ \dot{\mathcal{H}}_o &\stackrel{(4.11)}{=} \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} = \\ &= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Neid võrrandeid nimetatakse *Euleri liikumisvõrrandeks* (nagu oli juba eespool kirjjas). Kuna sisejõud on tasakaalus, siis nemad neis võrrandeis ei esine.

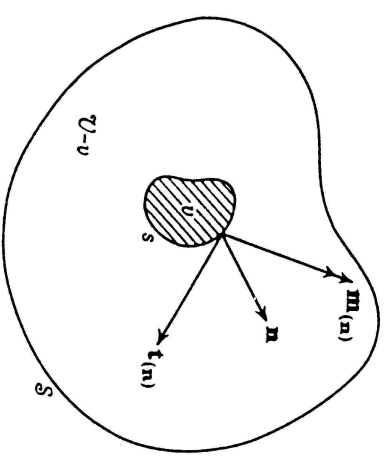
### 4.3. Pinge

### 4 - 16

#### 4.3.2 Cauchy pingehüpotees

Pinnal  $\Delta a$  mõjub keskmine jõud  $\Delta \mathcal{F}$  ja keskmine moment punkti  $p$  suhtes  $\mathcal{M}_p$ . Kui  $\Delta a \rightarrow 0$ , siis suhe  $\Delta \mathcal{F} / \Delta a \rightarrow \mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ . Kui vaadeldavas protsessis moment  $\dagger$  punkti  $p$  suhtes ei lähene nullile, siis saame ka suuruse  $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ .

Vaatleme väikest ruumipiirkonda  $v$ , mis on ümbritsetud pinnaga  $s$  ja mis asub täielikult kehas mahuga  $\mathcal{V}$  ja pinnaga  $S$  (joonis 4.1). Punktis  $p$ , mis asub pinnal  $s$  on välisnormaal  $\mathbf{n}$  ning mõjuvad jõud  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  ja moment  $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$  pinnaühiku kohta. Mõlemad nad on põhjustatud mahtude  $v$  ja  $\mathcal{V} - v$  koosmõjust pinnal  $s$ . Suurust  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  nimetatakse *pingeks* ehk *pingevektoriks* ja suurust  $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$  *momentpingeks* ehk *momentpingevektoriks*<sup>14</sup>. Nad iseloomustavad



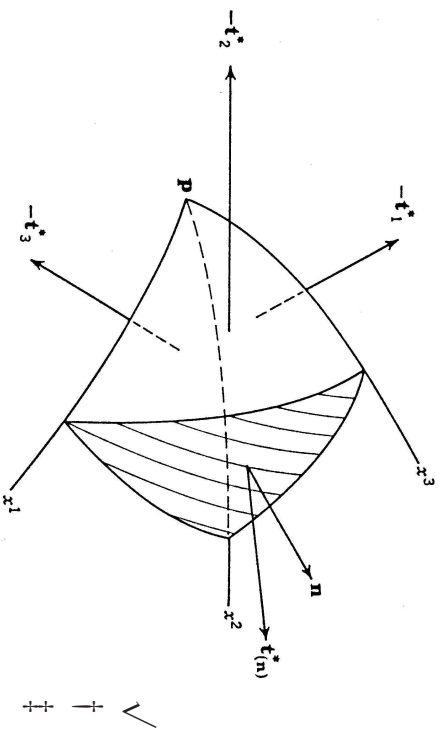
Joonis 4.1: Pinge ja momentpinge

vaadeldava mahu  $v$  välispinnal  $s$  mõjuvat väliskoorumust, mis ei sõltu ainult vaadeldava punkti kohavektorist  $\mathbf{p}$  vaid ka pinnanormaalist  $\mathbf{n}$ .

<sup>14</sup>Ik. couple stress



Vaatleme lõpnata väikest kõverjoonelist tetraeedrit (joonis 4.2), mille tipp  $p$  asub vaadeldava piirkonna  $v$  sees ja mille kolm tahku on koordinaatpinnad ning neljas asub pinnal  $s$ . Koordinaatpinnal  $x_i = \text{const}$ . mõjuva keskmise pinge tähistame  $-t_i^*$ . Kasutame vaadeldava tetraeedri jaoks liikumishulga tasakaalu seadust (integreerimisel on rakendatud keskvärtusteoreeme) —



Joonis 4.2: Tetraeeder

$$\frac{d}{dt} (\rho v^* \Delta v) = t_k^* \Delta a - t_k^* \Delta a_k + \rho \mathbf{f}^* \Delta v. \quad (4.24)$$

Siin  $\Delta v$  on tetraeedri ruumala,  $\Delta a$  ja  $\Delta a_k$  – tetraeedri tahkude pindalad,  $v^*$  – tetraeedri punktide keskmine kiirus ning  $\mathbf{f}^*$  – keskmine mahujõud.

Jagame nüüd viimase avaldise  $\Delta a$  ja laseme  $\Delta a \rightarrow 0$  nii, et punkt  $p$  läheneb

#### 4.3. Pinge

#### 4 - 18

pinnale  $s$  mahu  $v$  seest. Kuna  $\Delta v / \Delta a \rightarrow 0$ , siis piiril saame

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = t_k \frac{da_k}{da} = t_k n_k, \quad (4.25)$$

sest teatavasti elementaarpind  $da = \mathbf{n} da = da_k \mathbf{i}_k$  ja  $da_k = n_k da$ .

Kokkuvõttes oleme seega tõestanud **teoreemi** — *pingevektor punkti  $p$  läbival pinnal ühiknormaaliga  $\mathbf{n}$  on lineaarfunktsioon seda punkti läbivatel koordinaatpindadel mõjuvatest pingevektoritest  $t_k$ . Selle lineaarfunktsiooni kordajateks on pinnanormaalid  $\mathbf{n}$  suunakoosinused  $n_k$ .*

Pingevektorid  $t_k$  ei sõltu pinnanormaalist  $\mathbf{n}$ . Eeldades, et  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  on pidev funktsioon normaalist  $\mathbf{n}$  ja võttes valemis (4.25)  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}$  saame

$$\mathbf{t}_{(-\mathbf{n})} = -\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}, \quad (4.26)$$

st., punktis  $p$  mõjuvad sama pinna vastaskülgedel võrdvastupidised pingevektorid. Rakendades analoogilist mõttekäiku ka momentpingetele, saame

$$\mathbf{m}_{(\mathbf{n})} = m_k n_k \quad \text{ja} \quad \mathbf{m}_{(-\mathbf{n})} = -\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}. \quad (4.27)$$

*Chauchy pingehüpoteesi sisu:* Pinge sõltub vaid pinnanormaalist, mitte aga pinna kujust. Selgitus: vaadeldavas piirprotsessis  $\Delta a \rightarrow 0$  ei oma pinna kuju mitte mingit tähtsust.

### 4.3.3 Pingetensor

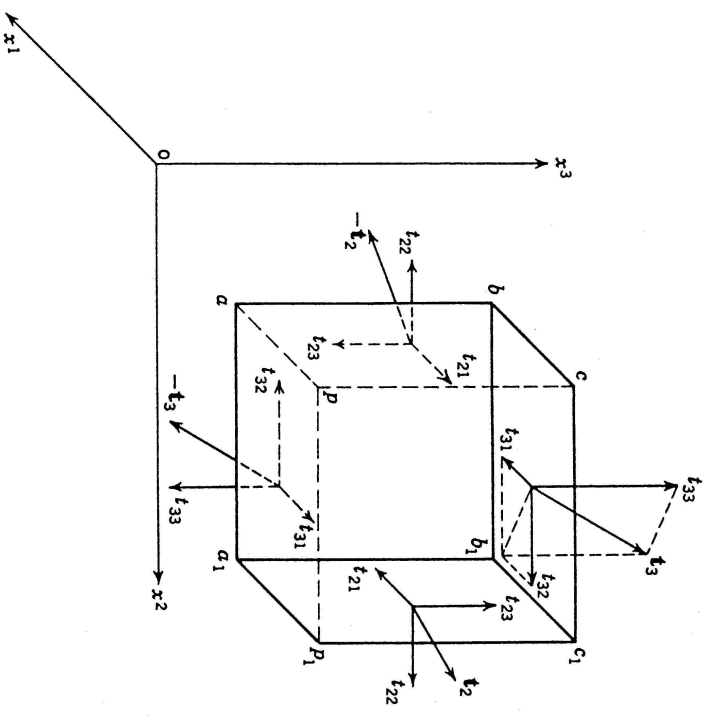
Pingetensori komponent (pingekomponent)  $t_{kl}$  on koordinaatpinnal  $x_k = \text{const}$  mõjuva pingevektori  $t_k$   $l$ -is komponent, st.,

$$t_k = t_{kl} \mathbf{i}_l \quad (4.28)$$

Seega näitab esimene indeks koordinaatpinda, millel pingektor  $t_k$  mõjub ja teine indeks vaadeldava komponendi mõjumise suunda. Pingekomponentide positiivsed suunad on näidatud joonisel 4.3. Pingetensori normaalkomponente  $k = l$  nimetatakse *normaalpingeteks*<sup>15</sup> ja segakomponente  $k \neq l$  *nihkepingseteks*<sup>16</sup>.

<sup>15</sup>IK. normal stress

<sup>16</sup>IK. shear stress



Joonis 4.3: Pingetensor

### 4.3. Pinge

Pingvektori  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  saab nüüd avaldada kujul

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = t_k n_k \stackrel{(4.28)}{=} t_{kl} n_k \mathbf{i}_l, \quad (4.29)$$

kust

$$t_{(\mathbf{n})l} = t_{kl} n_k. \quad (4.30)$$

Seega oleme tõestanud teoreemi — *punkti p läbiiva pinnal normaaliga  $\mathbf{n}$  mõjuv pingektor  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  avaldub lineaarfunktsioonina vaadeldava punkti pingetensorist  $t_{kl}$ .*

## Erinevate autorite erinevaid tähistusi pingetensori jaoks

$t_{11}$	$t_{22}$	$t_{33}$	$t_{23}$	$t_{31}$	$t_{12}$	Eringen, Truesdell
A	B	C	D	E	F	Cauchy varasemad tööd
$p_{xx}$	$p_{yy}$	$p_{zz}$	$p_{yz}$	$p_{zx}$	$p_{xy}$	Cauchy hilisemad tööd, St. Venant, Maxwell
$X_x$	$Y_y$	$Z_z$	$Y_z$	$Z_x$	$X_y$	F. Neumann, Kirchhoff, Love
P	Q	R	S	T	V	Kelvin
$\widehat{xx}$	$\widehat{yy}$	$\widehat{zz}$	$\widehat{yz}$	$\widehat{zx}$	$\widehat{xy}$	K. Pearson
$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$T_{yz}$	$T_{zx}$	$T_{xy}$	Kármán, Timošenko, insenerid
$T_{11}$	$T_{22}$	$T_{33}$	$T_{23}$	$T_{31}$	$T_{12}$	Green, Zerna, Vene ja Saksa autorid
$\sigma_{11}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{33}$	$\sigma_{23}$	$\sigma_{31}$	$\sigma_{12}$	Mõned Inglise ja Ameerika autorid ning teised
$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	$\sigma_{yz}$	$\sigma_{zx}$	$\sigma_{xy}$	

## 4.4. Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

## 4.4 Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

Lähtume valemist (4.23), st. liikumishulga ja kineetilise momendi globaalse tasakaal seadustest

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathfrak{M} &= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da, \\ \frac{D}{Dt} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{v} d\mathfrak{M} &= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da \end{aligned}$$

ning leiame vasakul poolel olevad materiaalsed tuletised.<sup>17</sup> Saame

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{a} d\mathfrak{M} &= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da, \\ \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{a} d\mathfrak{M} &= \int_{\mathfrak{M}} \mathbf{p} \times \mathbf{f} d\mathfrak{M} + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Need on valemite (4.23) alternatiivsed kujud. Vaatleme nüüd väikest mahtu  $dv$ , mis asub mahu  $\mathcal{V}$  sees ja kus on pidev massijaotus. Kasutades valemeid (4.25) saame viimastest

<sup>17</sup> $d\mathfrak{M} = \rho dv = \text{const.}$

$$\begin{aligned} \int_v \mathbf{a} \rho dv &= \int_v \mathbf{f} \rho dv + \int_s \mathbf{t}_k n_k da, \\ \int_v \mathbf{p} \times \mathbf{a} \rho dv &= \int_v \mathbf{p} \times \mathbf{f} \rho dv + \int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_k n_k da. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Kasutades Greeni-Gaussi teoreemi<sup>18</sup> saame üle minna pindintegraalilt ruumin-tegraleile

$$\begin{aligned} \int_v [\mathbf{t}_{k,k} + \rho(\mathbf{f} - \mathbf{a})] dv &= 0, \\ \int_v \{\mathbf{i}_k \times \mathbf{t}_k + \mathbf{p} \times [\mathbf{t}_{k,k} + \rho(\mathbf{f} - \mathbf{a})]\} dv &= 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Viimaste valemite tuletamisel on arvestatud, et  $\mathbf{p}_{,k} = \mathbf{i}_k$ . Valemid (4.33) kehtivad suvalise mahu  $v$  jaoks kui integraalide alused avaldised on nullid, st.,

$$\mathbf{t}_{k,k} + \rho(\mathbf{f} - \mathbf{a}) = 0, \quad \mathbf{i}_k \times \mathbf{t}_k = 0. \quad (4.34)$$

Need võrrandid väljendavadki *liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadust*. Vallemi (4.34)<sub>2</sub> saamiseks on kasutatud valemit (4.34)<sub>1</sub>.

<sup>18</sup>siin kasutame teda kujul  $\int_s \mathbf{t}_k n_k da = \int_v \mathbf{t}_{k,k} dv$  ja  $\int_s \mathbf{p} \times \mathbf{t}_k n_k da = \int_s (\mathbf{p} \times \mathbf{t}_k) n_k da = \int_v (\mathbf{p} \times \mathbf{t}_k)_{,k} dv$

#### 4.4. Liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalne tasakaal

#### 4 - 24

Vallemi (4.28) põhjal  $\mathbf{t}_k = t_{k,i} \mathbf{i}_i$ . Asendades selle võrranditesse (4.34) ning arvestades, et  $\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_i = \epsilon_{kim} \mathbf{i}_m$  saame esitada liikumishulga ja kineetilise momendi lokaalse tasakaalu seadused komponentkujul (koordinaatkujul) —

$$t_{k,i} + \rho(f_k - a_k) = 0, \quad t_{k,i} = t_{ik}. \quad (4.35)$$

Võrrand (4.35)<sub>2</sub> on saadud avaldisest  $\epsilon_{ijk} t_{jk} = 0$ .

Äsjatuletatud lokaalse tasakaalu seadusi kujul (4.34) või kujul (4.35) nimetatakse vastavalt *Cauchy esimeseks ja teiseks liikumisseaduseks*.<sup>19</sup>

Avaldisest (4.35)<sub>2</sub> järeldub, et pingetensor peab olema sümmeetriline — seega on meil vaadeldaval juhul vaid kuus sõltumatut pingekomponenti:  $t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{12} = t_{21}, t_{13} = t_{31}, t_{23} = t_{32}$ .

**Järeldus:** Kui liikumishulk on lokaalses tasakaalus ning mahu- ja pinnamomendid puuduvad, on kineetiline moment lokaalses tasakaalus parajasti siis kui pingetensor on sümmeetriline.

**Ülesanne 4.4.1.** Kirjutada valemid (4.35) lahiti nii DRK  $x_i$  kui  $x, y, z$  korral.

<sup>19</sup>Eringen võtab saadud tulemused kokku kahe teoreemina.

**Teoreem 1** Liikumishulga lokaalse tasakaalu tarvilik ja piisav tingimus on esitatav kujul (4.35)<sub>1</sub> või (4.34)<sub>1</sub>.

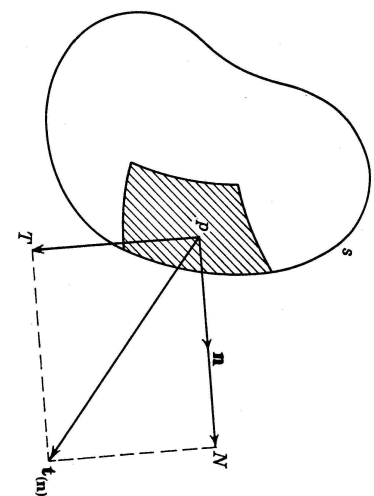
**Teoreem 2** Kineetilise momendi lokaalse tasakaalu tarvilik ja piisav tingimus esitatakse kujul (4.35)<sub>2</sub> või (4.34)<sub>2</sub>, tingimusel, et liikumishulk on lokaalses tasakaalus.

## 4.5 Peapinged ja pingetensori invariandid

### 4.5.1 Cauchy pingepinnad

Vaatleme pingevektorit  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ , mis mõjub punktis  $p$  pinnal  $S$ . Kui  $\mathbf{n}$  on pinnal  $s$  välisnormaal, siis pingevektori  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  normaalkomponent

$$N = \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{n} \stackrel{(4.30)}{=} t_{ki}n_k n_i. \quad (4.36)$$



Joonis 4.4: Normaal- ja tangentsiaalpinge

Kui fikseerime  $N$  väärtuse ja muudame pinnal orientatsiooni, siis selleks, et (4.36) oleks rahuldatud, peab muutuma pingetensor  $t_{ki}$ . Sel juhul esitab (4.36) teist järku pinda pingete ruumis. Seda pinda nimetatakse Cauchy pingepinnaks (analoogiliselt Cauchy deformatsioonilipsoidiga).

### 4.5. Peapinged ja pingetensori invariandid

### 4.5.2 Peapinged, pingetensori peasuunad ja invariandid

Kui massi- ja pinnamomendid puuduvad, siis on pingetensor  $t_{ki}$  sümmeetriline. Seega kehtivad tema kohta samad seaduspärasused, mis deformatsioonitensorite kohta:

- (i) pingetensoril leidub vähemalt kolm peasuunda;
- (ii) pingetensoril leidub kolm peapinget,  $t_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), mis mõjuvad peapindadel;
- (iii) peapindadel on nihkepinged nullid;
- (iv) pingetensoril leidub kolm sõltumatut invarianti  $I_t$ ,  $II_t$  ja  $III_t$ , mille leidmise eeskirjad, läbi pingetensori  $t_{ki}$  või peaväärtuste  $t_\alpha$ , on analoogilised Greeni deformatsioonitensori  $C_{KL}$  invariantide leidmise eeskirjadele (vt. 3. pkt.)

### 4.5.3 Pinguse (pingeoleku) erijuhud

Analoogiliselt deformatsioonide erijuhitudel saame eristada ka pinguse erijuhete.

- (i) Kaks peapinget on nullid, kolmas pole — *lihtne tõmme ehk üheteljeline pingus*<sup>20</sup>.
- (ii) Üks peapinge on null, kaks pole — *tasapinnaline pingus ehk tasandpingus ehk kaheteljeline pingus*<sup>21</sup>.
- (iii) Kui DRK-s esitatud tasandpinguse puhul kaks peapinget on suuruselt võrdsed kuid märgilt vastupidised<sup>22</sup>, siis nimetatakse sellist pingust *lihtsaks nihkeks*<sup>23</sup>.

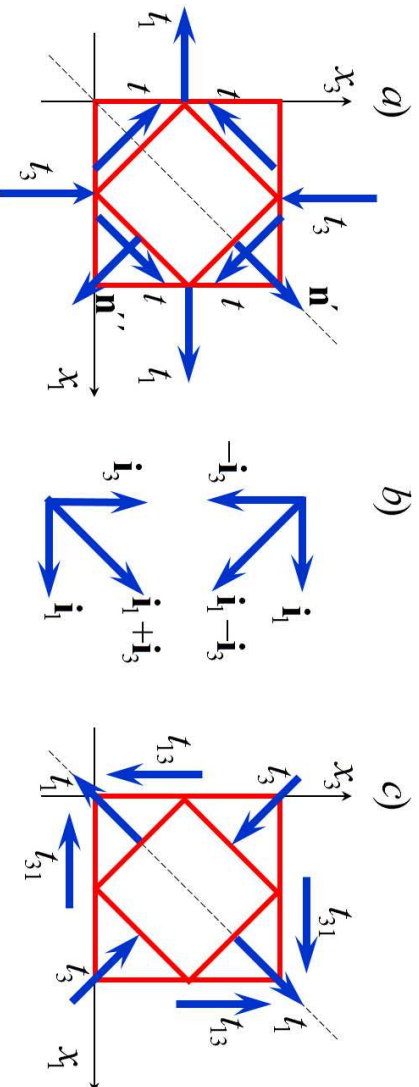
Lihtsa nihke korral puuduvad normaalpinged pindadel, mis moodustavad peapindadega  $45^\circ$  nurga. Joonisel 4.5 a) on kahe sellise pinna normaalid tähistatud

<sup>20</sup>I. k. *simple tension or uniaxial stress*

<sup>21</sup>I. k. *plane stress or biaxial stress*

<sup>22</sup>võib öelda ka, et üks nihkepinge on nullist erinev ja teised on nullid

<sup>23</sup>I. k. *simple shear*



Joonis 4.5: Lihtne nihke

$\mathbf{n}'$  ja  $\mathbf{n}''$ . Kui tähistada  $t_1 = -t_3 = t$ , ja valida koordinaadid peasuundades (st.  $x_1 \parallel \mathbf{n}_1$  ja  $x_3 \parallel \mathbf{n}_3$ ) saab pingetensor kuju

$$[t_{ki}] = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Arvestades, et  $\mathbf{n}' = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$  ja  $\mathbf{n}'' = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$  saame arvutada pinged vastavatel pindadel (vt. ka joonist 4.5 b)

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}'} = t_k n'_k = \dots = \frac{t}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_3) \quad \text{ja} \quad \mathbf{t}_{\mathbf{n}''} = t_k n''_k = \dots = \frac{t}{\sqrt{2}} (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3). \quad (4.38)$$

Loomulikult kehtib ka vastupidine lähenemine: kui tasandpinguse korral on pingetensoris nullist erinevad vaid komponendid  $t_{13} = t_{31} = t$ , siis on koordinaat-tasandite suhtes  $45^\circ$  all olevatel pindadel nullist erinevad vaid normaalpinged  $t_1 = -t_3 = t$  (vt. joonist 4.5 c) ja meenuta vändekatset malmiga).

Puhta nihke korral invariandid

$$I_I = III_I = 0 \quad \text{ja} \quad II_I = -t^2. \quad (4.39)$$

#### 4.6. Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

4 - 30

Cauchy liikumisvõrrandid (4.34) või (4.35) on esitatud EK-s. Lagrange'i kirjelduse jaoks toome sisse pseudopinge vektori  $\mathbf{T}_K$  ruumipunktis  $\mathbf{x}$ , mis vastab deformeerumata pinnale  $dA$  materiaalses punktis  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ , nii et

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da = t_k da_k = \mathbf{T}_K dA_K. \quad (4.40)$$

On selge, et pseudopinge on tõmbekatses kasutatava tingliku pingega analoogiline suurus.

Kuna valemi (3.233) põhjal  $da_k = j X_{K,k} dA_K$  ja  $dA_K = j^{-1} x_{k,K} da_k$  siis

$$\mathbf{t}_k = j^{-1} x_{k,K} \mathbf{T}_K \quad \text{ja} \quad \mathbf{T}_K = j X_{K,k} \mathbf{t}_k \quad (4.41)$$

Lähtume Cauchy esimesest liikumisest kujul (4.34)<sub>1</sub>, st.,

$$\mathbf{t}_{k,k} + \rho(\mathbf{f} - \mathbf{a}) = 0. \quad (4.42)$$

Kuna  $(j^{-1} x_{k,K})_{,k} = 0$ , siis

$$\mathbf{t}_{k,k} = (j^{-1} x_{k,K} \mathbf{T}_K)_{,k} = j^{-1} x_{k,K} \mathbf{T}_{K,k} = j^{-1} x_{k,K} \mathbf{T}_{K,L} X_{L,k} = j^{-1} \mathbf{T}_{K,K}. \quad (4.43)$$

Arvestades lokaalset massi jäävuse seadust  $\rho_0 = j\rho$  saame seega Cauchy esimesele liikumisseadusele kujulu

$$\mathbf{T}_{K,K} + \rho_0 (\mathbf{f} - \mathbf{a}) = 0. \quad (4.44)$$

Piola (1833, 1836 ja 1848) tõi sisse pseudopinge tensorid  $T_{Kl}$  ja  $T_{KL}$  nii, et

$$\mathbf{T}_K = T_{Kl}\mathbf{i}_l = T_{KL}x_{l,L}\mathbf{i}_l = T_{KL}\mathbf{C}_L. \quad (4.45)$$

Tänapäeval on need tensorid tuntud kui *esimene ja teine Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor*. Terminit pseudopinge kasutatakse siin seetõttu, et mõlemad  $\surd$  tensorid väljendavad pinget algse (deformeerumata) pinnakohta. Tensor  $T_{Kl}$  (esimene Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor) esitab pinget ruumipunktis  $\mathbf{x}$  ja tensor  $T_{KL}$  (teine Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensor) materiaalses punktis  $\mathbf{X}$ . Kombineerides avaldised (4.28), (4.41) ja (4.45) saame Cauchy pingetensori ning esimese ja teise Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensori vahelised seosed:

$$\begin{aligned} T_{Kl} &= jX_{K,k}t_{kl}, & t_{kl} &= j^{-1}x_{k,K}T_{Kl}, \\ T_{KL} &= T_{Kl}X_{L,l} = jX_{K,k}X_{L,l}t_{kl}, & & \\ t_{kl} &= j^{-1}x_{k,K}x_{l,L}T_{KL}, & T_{Kl} &= x_{l,L}T_{KL}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

#### 4.6. Liikumisseadused Lagrange'i koordinaatides

#### 4 - 32

Kasutades valemeid (4.45) saab avaldada võrrandi (4.44) läbi tensorite  $T_{Kl}$  ja  $T_{KL}$  —

$$\begin{aligned} T_{Kk,K} + \rho_0 (f_k - a_k) &= 0, \\ (T_{KL}x_{k,K})_{,K} + \rho_0 (f_k - a_k) &= 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Pinna ja mahumomentide puudumisel saab Cauchy teine liikumisseadus  $t_{kl} = t_{lk}$  LK-s kujulu

$$\begin{aligned} T_{Kk}x_{m,K} &= T_{Km}x_{k,K}, \\ T_{KL} &= T_{LK}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Tensoritega  $T_{KL}$  ja  $T_{Kl}$  seotud valemid ja Lagrange'i ehk materiaalseid koordinaate (Lagrange'i kirjeldust) on mugav kasutada tahkiste korral. Deformatsiooni käigus keha välispind muutub ja seega tuleb rajatingimused esitada liikuvale ja muutuvale pinnal ning nad sõltuvad siirdevektorist  $\mathbf{u}$ , mis on tundmatu. Lagrange'i kirjelduse puhul aga siin probleemi pole, sest rajatingimused esitatakse algse pinnakohta, mis on teada. Ka tensorid  $T_{KL}$  ja  $T_{Kl}$  on seotud algpinnaga. Tõsi küll, liikumisvõrrandid ise on sel juhul “pisut” keerukamad kui Euleri kirjelduse korral. Linearse teooria puhul erinevus kahe vaadeldava kirjelduse vahel kaob.



**Näide P1**

Pideva keskkonna deformatsiooni kirjeldab siirdeväli

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2 + AX_3, \\ x_3 = X_3 + AX_2. \end{cases}$$

ja Cauchy pingetensor ruumipunktis  $(1, 1, 1)$  on

$$[t_{ki}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Leida pingetensorite  $T_{Kl}$  ja  $T_{KL}$ , st. esimese ja teise Piola-Kirchoffi pingetensori, maatriksid. Milline materiaalne punkt on vaadeldaval hetkel ruumipunktis  $(1, 1, 1)$ ?

*4.6. Likumissaadused Lagrange'i koordinaatides***Lahenduskäik ja vastused.**

Kuna  $T_{Kl} = jX_{K,k}t_{kl}$  ja  $T_{KL} = T_{Kl}X_{L,l}$ , siis on kõigepealt vaja leida pöördteisendus  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ , jakobiaan  $j = \det(x_{i,k}, K)$  ja deformatsioonigradiendid  $x_{k,K}$  ja  $X_{K,k}$ .

1) Pöördteisendus

$$\begin{cases} X_1 = x_1, \\ X_2 = \frac{x_2 - Ax_3}{1 - A^2}, \\ X_3 = \frac{x_3 - Ax_2}{1 - A^2} \end{cases}$$

2) Deformatsioonigradiendid

$$[X_{K,k}] = \frac{1}{1 - A^2} \begin{bmatrix} 1 - A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -A \\ 0 & -A & 1 \end{bmatrix}; \quad [x_{k,K}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix}$$

3) Jakobiaan  $j = 1 - A^2$

4) Esimene Piola-Kirchoffi pingetensor  $T_{Kl} = jX_{K,k}t_{kl}$

$$[T_{Kl}] = \begin{bmatrix} 2(1 - A^2) & 3(1 - A^2) & 0 \\ 3 & -1 - A & 1 - 4A \\ -3A & 1 + A & 4 - A \end{bmatrix}$$

5) Teine Piola-Kirchoffi pingetensor  $T_{KL} = T_{Kl}X_{L,i}$

$$[T_{KL}] = \frac{1}{1 - A^2} \begin{bmatrix} 2(1 - A^2)^2 & 3(1 - A^2) & -3A(1 - A^2) \\ 3(1 - A^2) & -1 - 2A + 4A^2 & 1 - 3A + A^2 \\ -3A(1 - A^2) & 1 - 3A + A^2 & 4 - 2A - A^2 \end{bmatrix}$$

6) Materiaalne punkt  $(1, 1/(1 + A), 1/(1 + A))$  asub vaadeldaval hetkel ruumi-punktis  $(1, 1, 1)$ .