

Tallinna Tehnikaülikool
Mehaanikainstituut, Rakendusmehaanika õppetool
Küberneetika Instituut

Andrus Salupere

Pideva keskkonna mehhanika

Loengukonspekt

Tallinn 2016

i

Eessõna

Käesolev loengukonspekt on eeskätt mõeldud TTÜ tehnilise füüsika eriala üliõpilastele pideva keskkonna mehaanika kursuse EMR0030 õppimisel. Loengukonspekt põhineb autori poolt alates 1996. aastast Tallinna Tehnikaülikoolis sama eriala üliõpilastele peetud pideva keskkonna mehaanika loengutel. Aine käsitus on mittelineaarne ning põhineb järgmistel A.C. Eringeni ja M.N.L. Narasimhani õpikutel:

1. A.C. Eringen. *Mechanics of Continua*. John Wiley & Sons, inc., New-York et al., 1967.
2. A.C. Eringen. *Nonlinear Theory of Continuous Media*. McCraw-Hill Book Company, New-York et al., 1962.
3. M.N.L. Narasimhan. *Principles of Continuum Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., New-York et al., 1993.

Õppeaine maht, eeldused, õppekirjanduse loetelu ning antud aine õppimisel kehtiva töökorralduse kirjeldus on leitav loengukonspektiga samalt aadressilt: www.ioc.ee/~salupere/loko.

Märkused:

1. Loengukonspekt on internetis aadressil www.ioc.ee/~salupere/loko.
2. Loengukonspekt pole mõeldud kasutamiseks iseseisva õpikuna. Seetõttu on õpitavast ainetest tervikliku ülevaate saamiseks loengute külastamine ja vajalikus ulatuses konspekterimine hädavajalik.
3. Teksti paremas servas olevad märgid ($\sqrt{\quad}$, \bullet , \star jne.) tähistavad kohti, kus loengus esitatakse olulisi selgitavaid märkusi.
4. Loengukonspekti pisut ebaharilik väljanägemine (kaks A5 lehekülge on paigutatud ühele A4 lehele) on tingitud praktilistest kaalutlustest. Loengutel näidatakse materjali A5 lehekülgede kaupa.
5. Vabandan juba ette tekstis esineda võivate trükivigade pärast. Vastavasisulised märkused on teretulnud nii loengutes kui e-kirjade kujul aadressil salupere@ioc.ee.

Andrus Salupere

Peatükk 1

Sissejuhatus

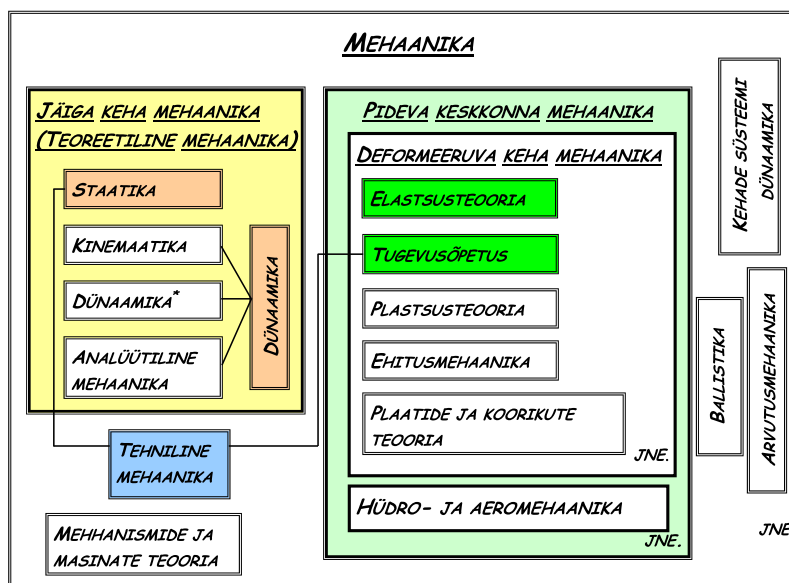
1. osa

ülevaade staatika ja dünaamika kursustest

Märkus: Ülevaade kursusest „Elastusteooria alused” on sissejuhatuse 2. osas ja see on eraldi failina aadressil www.ioc.ee/~salupere/loko.

1.1 Mehaanika harud

Mehaanika on teadus, mis uurib tahkete kehade, vedelike ja gaaside liikumist, selle liikumise põhjusi ja tagajärgi.



Joonis 1.1: Mehaanika harud

1.1.1 Jäiga keha mehaanika

Jäiga keha mehaanika ehk teoreetiline mehaanika uurib absoluutselt jäikade kehade liikumist ja paigalseisu neile rakendatud jõudude toimel.

Absoluutselt jäiga keha mistahes kahe punkti vaheline kaugus on konstantne.

Laias laastus võib teoreetilise mehaanika jagada *staatikaks*, *kinemaatikaks* ja *dünaamikaks*.

- *Staatika* uurib:
 1. kehade tasakaalu (täpsemalt öeldes kehadele rakendatud jõusüsteemide tasakaalu) ja
 2. jõusüsteemide lihtsustamist ehk taandamist.
- *Kinemaatika* uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.
- *Klassikaline dünaamika* uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimel.

Liikumisena ehk mehaanikalise liikumisena mõistetakse vaadeldava keha asendi muutust teiste kehade suhtes. Selleks valitakse tavaliselt üks keha, mille suhtes uuritakse liikumist ja seotakse sellega järgalt koordinaatsüsteem. Tulemust nimetatakse *taustsüsteemiks*.

Punktmassiks nimetatakse materiaalselt keha, mille mõõtmeid tema liikumise uurimisel ei arvestata.

*Aeg*¹ loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides.

1.1.2 Pideva keskkonna mehaanika

Pideva keskkonna mehaanika (PKM) uurib tahkiste (deformeeruvate tahkete kehade), gaaside ja vedelike liikumist välismõjude toimel.

¹Kunstiinimeste alternatiivne aja definitsioon: *aeg on julmalt ja kiirelt mööduv nähtus*.

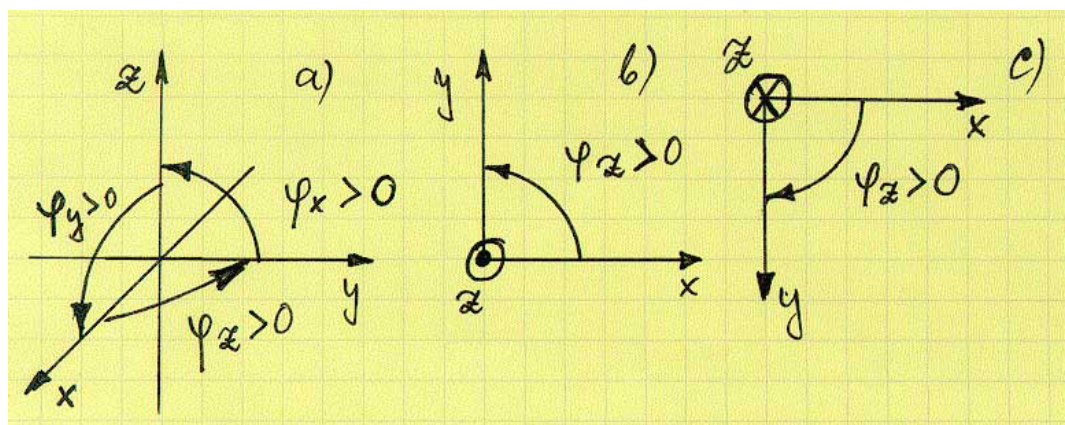
Palju harusid

- tahkise (deformeeruva keha) mehaanika
 - tugevusõpetus
 - elastsusteooria
 - plastsusteooria
 - jne.
- hüdro- ja aeromehaanika
 - hüdrostaatika
 - hüdrodünaamika
 - jne.

1.2 Staatika

- Jäik keha
- Jõud
 - Kehade vastastikuse mõju mõõt
- Jõusüsteem
 - koonduv JS, paralleeljõudude süsteem, jne.
- Jõu moment, jõupaar
 - $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
- Jõu ja momendi projektsioonid ning komponendid
 - $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_x + \mathbf{Q}_y + \mathbf{Q}_z = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k}$

Koordinaadid ja koordinaatteljed



- Descartes'i ristkoordinaadid (DRK)
- *Koordinaatteljed peavad moodustama parema käe kolmiku*
- Ümber telje toimuva *pöörde positiivne suund* määratakse kruvireeglga

Vabaks kehaks nimetatakse keha, mille liikumist ei piira mitte ükski tingimus. Vaba keha saab antud asendist üle viia mistahes uude asendisse.

Side on keha liikumist kitsendav tingimus. Tavaliselt moodustab sideme mingi teine keha.

Sidemereaktsioon ehk reaktsioonjõud on jõud, millega sidet moodustav keha mõjub vaadeldavale kehale.

Inseneriülesannete puhul nimetatakse sidemeid tihti ka *tugedeks* ja vastavaid reaktsioonjõudusid *toereaktsioonideks*.

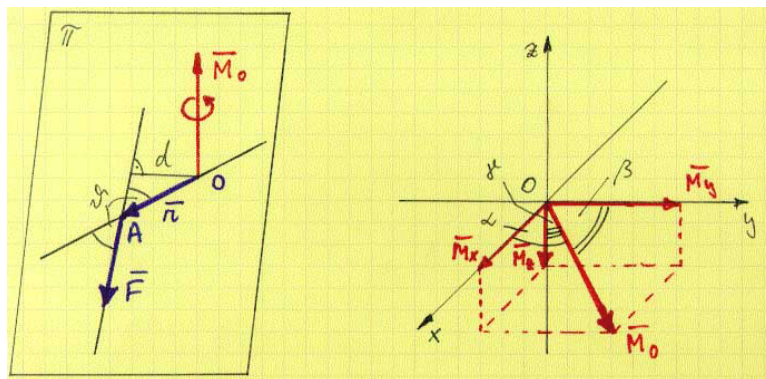
Sidemetest vabastatavuse printsiip: Iga seotud keha võib vaadelda vaba kehana kui asendada sidemed sidemereaktsioonidega.

Sidemete tüübid: sile pind, kare pind, liikumatu liigend(tugi), liikuv liigend(tugi), kerge varras, painduv ühendus jne.

Jõu momendiks punkti suhtes nimetatakse vektorit, mis võrdub jõu rakenduspunkti A kohavektori \mathbf{r} ja jõuvektori \mathbf{F} vektorkorrutisega.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad M_O \equiv |\mathbf{M}_O| = Fr \sin \vartheta = Fd. \quad (1.1)$$

Jõu moment iseloomustab jõu pööravat toimet.



Joonis 1.2: Jõu moment punkti suhtes.

Momentvektori \mathbf{M}_O suurus (ehk moodul) ja suund sõltub punkti O valikust kuid ei sõltu punkti A valikust jõu mõjusirgel.

Momentvektori \mathbf{M}_O mõjusirge määrab telje, mille ümber jõud \mathbf{F} püüab tekitada pöörlemist.

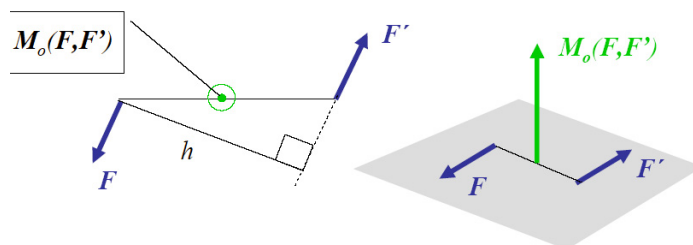
Pöörde suund määratakse *kruvireeglina* — kui (parema käe) kruvi teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga, siis keha pöörlemise suund ühtib kruvi pöörlemise suunaga. Ja vastupidi, kui kruvi pöörata keha pöörlemise suunas, siis tema teljesihilise liikumise suund ühtib momentvektori suunaga.

Jõu moment telje suhtes võrdub selle telje mistahes punkti suhtes leitud momentvektori projektsiooniga vaadeldaval teljel.

- See on üldlevinud määratlus ja selle põhjal on tegu skalaariga. Tegelikult võib ka jõu momenti telje suhtes käsitleda vektorina.
- Praktikas leitakse moment valemist $M = \pm Fd$, s.t. jõud korda jõu õlg, ning märk määratakse kruvireeglina. ✓

Jõupaari moodustavad kaks võrdvastupidist jõudu \mathbf{F} ja $-\mathbf{F}$ millel on erinev mõjusirge.

Jõupaari moment võrdub ühe jõupaari moodustava jõu momendiga teise rakeduspunkti suhtes. Jõupaari moment on *vabavektor*.

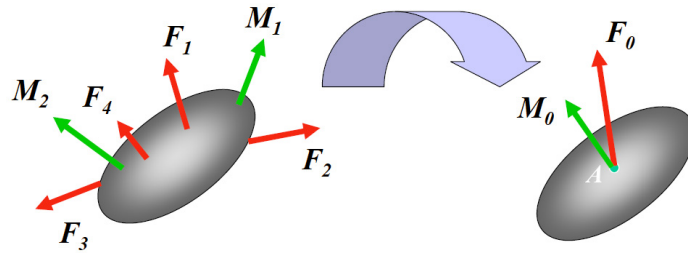


Jõupaari moment on *vabavektor*, mille moodul $M=Fh$, kus h on jõupaari õlg.

Joonis 1.3: Jõupaar ja jõupaari moment
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonspektist.)

Lemma jõu paraleellükkest. Jäiga keha mistahes punktis A rakendatud jõu võib paralleelselt tema mõjusirgega üle kanda uude rakenduspunkti B kui lisada punktis A rakendatud jõu moment punkti B suhtes.

Staatika põhiteoreem (Poinsot' teoreem): Iga jäigale kehale rakendatud jõusüsteemi saab asendada taandamistsentrisse rakendatud jõusüsteemi peavektoriga ja jõusüsteemi peamomendiga taandamistsentri suhtes.



Joonis 1.4: Jõusüsteemi peavektor ja peamoment. Joonisel on kahjuks O asemel A .
(Joonis on pärit prof. A. Klausoni *Tehnilise mehaanika* loengukonseptist.)

Jõusüsteemi peavektor: $\mathbf{F}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$

Jõusüsteemi peamoment: $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i)$, kus punkti O nimetatakse *taandamistsentriks*. (Joonisel on kahjuks O asemel A .)

Jõusüsteem on tasakaalus parajasti siis kui peavektor \mathbf{F}_O ja mingi punkti O suhtes leitud peamoment \mathbf{M}_O on võrdsed nulliga:

$$\mathbf{F}_O = \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i) = 0. \quad (1.2)$$

Skalaarsed tasakaalu tingimused:

$$\begin{cases} \sum_i F_{ix} = 0, & \sum_i F_{iy} = 0, & \sum_i F_{iz} = 0, \\ \sum_i M_x(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_y(\mathbf{F}_i) = 0, & \sum_i M_z(\mathbf{F}_i) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

1.3 Kinemaatika

- *Kinemaatika* uurib liikumise geomeetrilisi seaduspärasusi.
- *Liikumisena* ehk mehaanikalise liikumisena mõistetakse vaadeldava keha asendi muutust teiste kehade suhtes.
 - Selleks valitakse tavaliselt üks keha, mille suhtes uuritakse liikumist ja seotakse sellega järgalt koordinaatsüsteem.
 - Tulemust nimetatakse *taustsüsteemiks*.
- *Punktmassiks* nimetatakse materiaalet keha, mille mõõtmeid tema liikumise uurimisel ei arvestata.
 - Materiaalne punkt
- Liikumise kirjeldamiseks peab olema kokkulepe kuidas mõõdetakse aega
 - *Aeg* loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides

- Punkti *trajektooriks* nimetatakse pidevat joont, mille joonistab liikuv punkt taustsüsteemi suhtes
- *Punkti liikumiseaduseks* nimetatakse eeskirja, mis määrab punkti asukoha igal ajahetkel.
 - *Vektoriaalne viis*.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

- *Koordinaatviis*. — Descartes'i ristkoordinaadid (DRK)

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

- seos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- *Loomulik viis.* Punkti asukoht ruumis määratakse tema loomuliku koordinaadiga

$$s = s(t).$$

- seos

$$s = \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

- *Punkti kiiruseks* nimetatakse tema kohavektori esimest tuletist aja järgi

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$

- DRK

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

- *Kiirus on vektor*, mis

- on suunatud piki trajektoori puutujat liikumise suunas;
- iseloomustab nii kohavektori pikkuse kui suuna muutumist.

- *Punkti kiirenduseks* nimetatakse kiirusvektori esimest tuletist aja järgi ehk tema kohavektori teist tuletist aja järgi.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

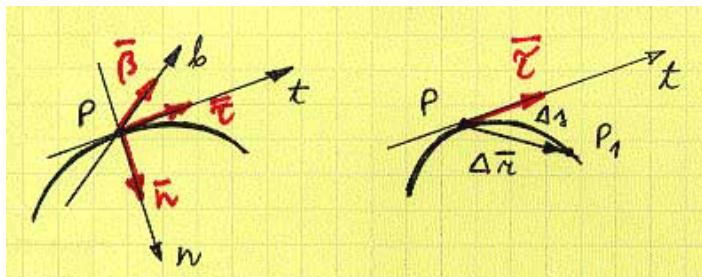
- DRK

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}.$$

- *Kiirendus on vektor*, mis

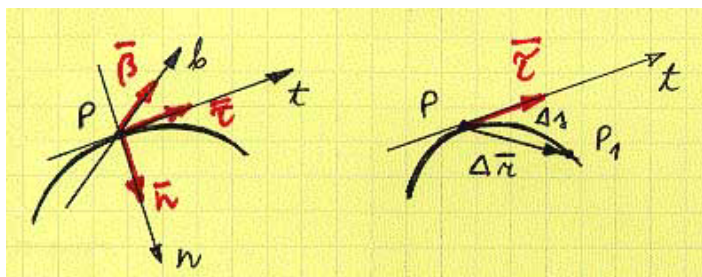
- on suunatud trajektoori sisse (v.a. sirgjooneline liikumine);
- iseloomustab kiiruse muutumist (nii kiirusvektori pikkuse kui suuna muutumist).

- *Loomulik teljestik*: parema käe teljestik $t-n-b$, mis liigub koos vaadeldava punktiga.



- telg t on puutuja, n peanormaali ja b binormaali sihis
- Vastavaid ühikvektoreid tähistame τ , ν ja β .

- *Koordinaattasandid*:



- $t-n$ — kooldumistasand,
- $t-b$ — sirgestumistasand,
- $b-n$ — normaaltasand.
- *Kiirus*

$$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}$$

- *Kiirendus*

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

- \mathbf{a}_t — puutekiirendus ehk tangentsiaalkiirendus
- \mathbf{a}_n — normaalkiirendus
- Vastavad projektsioonid

$$a_t = \ddot{s} = \dot{v}_t \text{ ja } a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}$$

- $a_b = 0$!!!

- Puutekiirendus \mathbf{a}_t iseloomustab kiirusvektori mooduli muutumist
- Normaalkiirendus \mathbf{a}_n iseloomustab kiirusvektori suuna muutumist
- Kuna kiirenduse projektsioon b -teljel (binormaalil) on null, siis kiirenduse moodul

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Jäiga keha liikumise tüübid

- *Rööpliikumiseks* nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul iga kehaga muutumatult seotud sirge jääb kogu liikumise kestel oma algsihiga paralleelseks
- *Pöörlemiseks* nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul kaks kehaga muutumatult seotud punkti jäävad kogu liikumise kestel paigale
 - *Keha pöörlemisseaduseks* nimetatakse pöördenurga muutumise eeskirja $\varphi = \varphi(t)$
 - * Kui pöörlemine toimub ümber z telje, siis võib pöörlemisseaduse esitada kujul

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi(t) = \varphi_z(t)\mathbf{k}$$

- *Nurkkiiruseks* nimetatakse pöördenurga vektori esimest tuletist aja järgi:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}.$$

- Nurkkiirus(vektor) $\boldsymbol{\omega}$ määrab
 - * pöörlemise suuna (läbi kruvireegli)
 - * pöörlemise kiiruse (rad/s ehk 1/s)
- *Nurkkiirenduseks* nimetatakse nurkkiiruse vektori esimest tuletist aja järgi ehk pöördenurga vektori teist tuletist aja järgi:

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\boldsymbol{\varphi}}.$$

- Pöörleva keha punkti kiirus

$$\mathbf{v} = \omega_z h \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

- kiiruse projektsioon loomulikul teljel t

$$v_t = \omega_z h = \dot{\varphi}_z h,$$

- kiiruse moodul

$$v = \omega h = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|.$$

- Pöörleva keha punkti kiirendus, puutekiirendus ja normaalkiirendus

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \\ \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \\ \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \end{cases}$$

- Vastavad moodulid

$$\begin{cases} a = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4 h}, \\ |a_t| = \alpha h, \\ a_n = \omega^2 h \end{cases}$$

- *Tasapinnaliseks liikumiseks* nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul kõik keha punktid liiguvad tasapindades, mis on paralleelsed ühe paigalseisva tasapinnaga.
 - Tasapinnalise liikumise võib lahutada
 - * tasapinnaliseks rööpliikumiseks koos vabalt valitud poolusega ja
 - * pöörlemiseks ümber selle pooluse (pöörlemiseks ümber seda poolust läbiva ja vaadeldava tasandiga ristuva telje).
 - * Rööpliikumine sõltub pooluse valikust, pöörlemine aga mitte
 - $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$, $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}$
 - Hetkeline kiiruste tšenter ja hetkeline kiirenduste tšenter

- *Liitliikumine* — vaadeldav keha liigub taustsüsteemis, mis omakorda liigub mingi teise (paigalseisva) taustsüsteemi suhtes
 - *Absoluutseks liikumiseks* nimetatakse punkti (keha) liikumist liikumatu taustsüsteemi suhtes
 - *Relatiivseks liikumiseks* nimetatakse punkti (keha) liikumist liikuva taustsüsteemi suhtes
 - *Kaasaliikumiseks* (ülekandeliikumiseks) nimetatakse liikuva taustsüsteemiga muutumatult seotud punktide liikumist liikumatu taustsüsteemi suhtes
- Absoluutne kiirus võrdub relatiivse kiiruse ja kaasaliikumise kiiruse geomeetrilise summaga

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e.$$
- Absoluutne kiirendus võrdub relatiivse kiirenduse, kaasaliikumise kiirenduse ja Coriolise kiirenduse geomeetrilise summaga

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_C$$
- *Coriolise kiirendus*

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$$

- *Sfääriliseks liikumiseks* nimetatakse jäiga keha sellist liikumist, mille puhul üks kehaga muutumatult seotud punkt jääb liikumatuks.
 - Seda liikumatut punkti nimetatakse *kinnispunktiks*²
 - Lõikuvate telgede ümber toimuvate pöörlemiste liitmine
- *Vaba jäiga keha liikumine*
 - Vaba jäiga keha liikumine on lahutatav rööpliikumiseks koos vabalt valitud poolusega ja pöördeks ümber poolust läbiva pöörlemistelje

²Jäiga keha liikumine kinnispunkti ümber

1.4 Dünaamika

- *Dünaamika (klassikalises mõttes)* uurib punktmasside ja jäikade kehade liikumist neile mõjuvate jõudude toimetel
- Newtoni seadused
 - I — inertsiseadus
 - *Inerts*³ on kehade võime püsida paigalseisus või ühtlases ja sirgjoonelises liikumises kuni mingi jõud seda olekut ei muuda.
 - * Keha inerts mõõduks on tema *mass*
 - II — dünaamika põhiseadus: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
 - III — mõju ja vastumõju seadus

³kr. *inertia* - tegevusetus, loidus

Märkused:

- Newtoni seadused pole matemaatiliselt tõestatavad vaid nad põhinevad katsetel.
 - See annabki aluse nimetada neid ka aksioomideks.
 - Neile seadustele on ülesehitatud kogu klassikaline mehaanika (vastandina relativistlik mehaanika).
- Praktikas loetakse paigalseisvaks taustsüsteemiks tavaliselt Maaga seotud taustsüsteemi. Kui sellest ei piisa, seotakse liikumatu taustsüsteem Päikesega.
- *Aeg* loetakse universaalseks, st., ühtviisi kulgevaks kõigis taustsüsteemides.
 - Newton: „Seadused kehtivad absoluutses ajas, millel pole mitte midagi ühist mitte millegagi väljaspool teda ja mis kulgeb ühtlaselt.”
 - Praktikas lähtutakse aja mõõtmisel ikkagi mingist konkreetsest nähtusest (Maa pöörlemine, isotoobi ^{133}Cs kiirguse periood).

- Praktikas määratakse keha mass kaalumise teel:

$$m = \frac{P}{g}.$$

- Newtoni II seadus käsitleb juhtu, kus punktmassile mõjub vaid üks jõud.
 - *Jõudude mõju sõltumatuse printsiip*: Jõu mõju punktmassi liikumisele ei sõltu sellest, kas punktile on rakendatud peale tema veel teisi jõude või ei ole.

Punktmassi dünaamika kaks põhiülesannet

- Newtoni II seadus + jõudude mõju sõltumatuse printsiip

$$m\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

1. On antud punktmassi liikumisseadus. Leida millised punktmassile rakendatud jõud põhjustavad sellise liikumise!
 - diferentseerimine

2. On teada punktmassile mõjuvad jõud. Leida selle punktmassi liikumiseadus!

– integreerimine

- *Punktmasside mehaanikaliseks süsteemiks* nimetatakse sellist ükskeist mõjutavate punktmasside kogumit, kus iga punktmassi liikumine sõltub teiste punktmasside liikumisest ja asukohast.
 - päikesesüsteem, vedelikud, gaasid, tahked kehad jne.
 - Lühiduse mõttes jäetakse sõna mehaanikaline tihti ära ja piirduakse vaid terminiga punktmasside süsteem.
- *Välisjõud* on jõud, millega sellesse süsteemi mittekuuluvad kehad mõjutavad vaadeldava süsteemi punkte.
- *Sisejõud* on jõud, millega vaadeldavasse süsteemi kuuluvad punktmassid mõjutavad ükskeist.
- Punktmasside süsteemi kõigi sisejõudude summa on null.
- Punktmasside süsteemi kõigi sisejõudude momentide summa mistahes punkti suhtes on null.

- *Punktmasside süsteemi mass*

$$m = \sum_i m_i$$

- *Punktmasside süsteemi massikes*

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m},$$

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}.$$

Masskeskme liikumise teoreem

- *Teoreem:* Punktmasside süsteemi masskese liigub nagu punktmass, mille mass võrdub süsteemi kogumassiga ja millele on rakendatud kõik sellele süsteemile mõjuvad välisjõud:

$$m\mathbf{a}_C = \sum_i \mathbf{F}_i$$

- DRK

$$m\ddot{x}_C = \sum_i F_{ix}, \quad m\ddot{y}_C = \sum_i F_{iy}, \quad m\ddot{z}_C = \sum_i F_{iz}$$

- $\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_C = 0$, $\sum_i F_{ix} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_C = 0$ jne.

Liikumishulk

- *Punktmasside süsteemi liikumishulgaks*⁴ nimetatakse süsteemi kõigi punktide liikumishulkade geomeetrilist summat —

$$\mathbf{K} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_C.$$

- $m_i \mathbf{v}_i$ — i -nda punktmassi liikumishulk
- \mathbf{v}_C — masskeskme kiirus

- Eesti keeles on terminid impulss ja liikumishulk sünonüümid

Jõu impulss

- *Jõu \mathbf{F} elementaarimpulsi* nimetatakse korrutist $\mathbf{F}dt$, kus dt on elementaarajavahemik.
- *Jõu impulsi lõplikus ajavahemikus $[t_0, t_1]$* nimetatakse integraali

$$\mathbf{J} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt.$$

⁴I.k. (linear) momentum

Liikumishulga teoreemi diferentsiaalkuju

- Punktmasside süsteemi liikumishulga tuletis aja järgi võrdub süsteemile mõjuvate välisjõudude geomeetrilise summaga —

$$\dot{\mathbf{K}} = \sum_i \mathbf{F}_i.$$

- DRK

$$\dot{K}_x = \sum_i F_{ix}, \quad \dot{K}_y = \sum_i F_{iy}, \quad \dot{K}_z = \sum_i F_{iz}.$$

- *Järeldus (liikumishulga jäävuse seadus)*: Välisjõududest vaba süsteem liigub muutumatu liikumishulgaga.

Liikumishulga teoreemi integraalkuju

- Punktmasside süsteemi liikumishulga muutus teatud ajavahemikus Δt võrdub samas ajavahemikus süsteemile mõjuvate välisjõudude impulsside geomeetrilise summaga —

$$\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0 = \sum_i \mathbf{J}_i,$$

- DRK

$$K_{1x} - K_{0x} = \sum_i J_{ix},$$

$$K_{1y} - K_{0y} = \sum_i J_{iy},$$

$$K_{1z} - K_{0z} = \sum_i J_{iz}.$$

Liikumishulga moment, kineetiline moment⁵

- *Punktmassi liikumishulga momendiks* punkti O suhtes nimetatakse vektorikorrutist

$$\mathbf{L}_O(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v},$$

kus r on punktmassi kohavektor ja $m\mathbf{v}$ tema liikumishulk.

- *Punktmasside süsteemi kineetiline moment* on võrdne süsteemi kõigi punktide liikumishulkade momentide geomeetrilise summaga —

$$\mathbf{L}_O = \sum_i \mathbf{L}_O(m_i\mathbf{v}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i$$

(Loomulikult peavad kõik momendid olema leitud ühe ja sama punkti O suhtes.)

- Nii punktmassi liikumishulga momendi kui punktmasside süsteemi kineetilise momendi puhul kasutatakse eestikeelses kirjanduses ka termineid *impulsi moment* või *pöördeimpulss*.

⁵I.k. *angular momentum, moment of momentum*

- Jõu momendi ja liikumishulga momendi definitsioonid on analoogsed ja analoogne on ka kogu teooria, mis meist räägib: komponendid, projektsioonid, peamoment jne

- Pöörleva keha puhul

$$L_z = I_z\omega_z,$$

kus $I_z = \int_m \rho^2 dm = \int_m (x^2 + y^2) dm$ on keha massiinertsimoment.

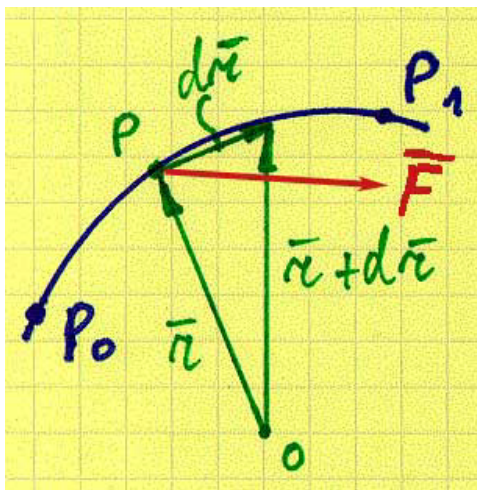
- *Kineetilise momendi teoreem*: punktmasside süsteemi kineetilise momendi tuletis aja järgi võrdub vaadeldavale süsteemile rakendatud välisjõudude peamomendiga —

$$\dot{\mathbf{L}}_O = \sum_i \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_i).$$

— Vaadeldav teoreem esitatakse diferentsiaal kujul. Võimalik on esitada teda ka integraalkujul.

- *Järeldus (kineetilise momendi jäävuse seadus)*: Välisjõududest vaba süsteem liigub muutumatu kineetilise momendiga.

— Seega, kui $\mathbf{L} = \text{const.}$ puhul muutub keha inertsimoment, siis peab vastavalt muutuma ka tema nurkkiirus



- *Jõu elementaartööks* nimetatakse jõu ja tema rakenduspunkti elementaarsirde skalaarkorrutist:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- *Jõu töö tema rakenduspunkti lõplikul siirdel* punktist P_0 punkti P_1 esitatakse joonintegraalina

$$W = \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_0}^{P_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

- *Jõupaari elementaartöö* (pöördel ümber z telje)

$$dW = M_z d\varphi_z$$

- *Jõupaari töö lõplikul pöördel* asendist φ_0

1.4. Dünaamika

asendisse φ_1

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_z d\varphi_z.$$

- *Jõu võimsuseks* nimetatakse ajaühikus tehtavat tööd, st., töö muutmise kiirust —

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad \text{ehk} \quad P = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z.$$

- *Jõupaari võimsus*

$$P = M_z \omega_z.$$

*Kineetilise energia teoreem*⁶

- *Punktmassi kineetiline energia*

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

- *Kineetilise energia teoreemi diferentsiaalkuju punktmassi jaoks:* Kineetilise energia tuletis aja järgi võrdub vaadeldavale punktmassile mõjuva jõu võimsusega

$$\dot{T} = P.$$

- *Kineetilise energia teoreemi integraalkuju:* kineetilise energia muutus punktmassi üleminekul asendist P_0 asendisse P_1 võrdub talle rakendatud jõu poolt tehtava tööga sellel liikumisel.

$$T_1 - T_0 = W$$

- Seega tööd saadakse selle arvelt, et kineetiline energia muutub, annab osa endast ära.

⁶Vaadeldavat teoreemi nimetatakse ka kineetilise energia muutumise teoreemiks või lihtsalt energiateoreemiks.

- *Punktmasside süsteemi kineetiline energia*

$$T = \sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

- *Kineetilise energia teoreemi diferentsiaalkuju punktmasside süsteemi jaoks:*

Kineetilise energia tuletis aja järgi võrdub kõigile süsteemi punktidele rakendatud sise- ja välisjõudude võimsuste summaga —

$$\dot{T} = \sum_{k=1}^n P_k^i + \sum_{k=1}^n P_k^e.$$

- *Kineetilise energia teoreemi integraalkuju punktmasside süsteemi jaoks:*

Kineetilise energia muutus punktmasside süsteemi liikumisel ühest asendist teise võrdub süsteemi punktidele rakendatud sise- ja välisjõudude tööde summaga sellel liikumisel —

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^n W_k^i + \sum_{k=1}^n W_k^e.$$

- Nagu näha, tuleb kineetilise energia teoreemi puhul sisejõud arvesse võtta.
 - *Süsteemi nimetatakse muutumatuks* kui süsteemi liikumisel tema sisejõudude rakenduspunktide vahelised kaugused ei muutu.
 - Muutumatu süsteemi puhul on süsteemi sisejõudude töö null

- Kineetilise energia leidmine

- rööpliikumine

$$T = \frac{mv_C^2}{2}$$

- Pöörlemine ümber z telje

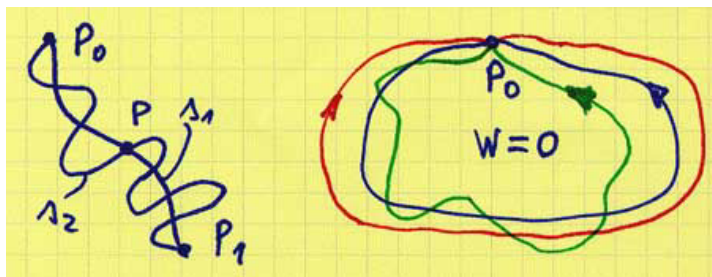
$$T = \frac{I_z \omega_z^2}{2}$$

- Tasapinnaline liikumine

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_z^2}{2}$$

Viimase avaldise puhul leitakse inertsimoment I_C masskeset läbiva ja z teljega paralleelse telje suhtes.

Konservatiivsed jõud



- Kui jõu töö tema rakenduspunkti liikumisel asendist P_0 asendisse P_1 ei sõltu trajektoori kujust, siis nimetatakse sellist jõudu *konservatiivseks jõuks*
 - Näiteks gravitatsioonijõud ja elastsusjõud.
 - Kinnise trajektoori puhul on konservatiivse jõu töö null.
 - Mittekonservatiivseid jõude nimetatakse *dissipatiivseteks jõududeks*
 - * Näiteks hõõrdejõud.

- Konservatiivse jõu \mathbf{F} töö tema rakenduspunkti lõplikul siirdel punktist P_0 punkti P_1

$$W = \int_{P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_0}^{P_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

on sõltumatu integreerimisteest.

- Joonintegraal ei sõltu integreerimisteest siis ja ainult siis kui integraalialune avaldis on mingi funktsiooni täisdiferentsiaal. Seega võime sisse tuua funktsiooni $V(x, y, z)$ kujul

$$-dV(x, y, z) = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

- Sellist täitvat funktsiooni V nimetatakse *potentsiaalseks energiaks*. Miinus märk on siin sisse toodud kokkuleppe tõttu.
- Potentsiaalse energia definitsiooni $-dV(x, y, z) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ põhjal

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

- Konservatiivse jõu töö

$$W = - \int_{P_0}^{P_1} dV = - V|_{P_0}^{P_1} = V_0 - V_1$$

kus V_0 on süsteemi algasendile ja V_1 süsteemi lõppasendile vastav potentsiaalne energia.

- Konservatiivse jõu töö $W = V_0 - V_1$ võrdub süsteemi alg- ja lõppasendile vastavate potentsiaalsete energiatega (potentsiaalide) vahega.
- Potentsiaalne energia iseloomustab keha võimet teha tööd ja ta sõltub keha asendist (jõuväljas).
 - Kui keha potentsiaalne energia suureneb, siis $W < 0$ — keha potentsiaalse energia suurendamiseks on vaja teha tööd.
 - Kui keha potentsiaalne energia väheneb, siis $W > 0$ — potentsiaalse energia vähenemise arvelt võib "saada" tööd.
- Kui valemis definitsioonis poleks sisse toodud miinus märki, saaks töö avaldis kuju $W = V_1 - V_0$.

- Olgu kõik muutumatule mehaanikalisele süsteemile mõjuvad jõud konservatiivsed
 - Nende jõudude töö süsteemi liikumisel algasendist lõppasendisse: $W = V_0 - V_1$
 - Kineetilise energia teoreem: $T_1 - T_0 = V_0 - V_1$

- Viimasest saame

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1 \quad \text{ehk} \quad \underbrace{T + V}_{=E} = \text{const.}$$

- Kineetilise ja potentsiaalse energia summat nimetatakse *mehaanikaliseks energiaks* ja tähistatakse E .

Mehaanikalise energia jäävuse seadus

- Kui punktmasside süsteem liigub konservatiivsete jõudude mõjul siis jääb tema mehaaniline energia konstantseks:

$$E = T + V = \text{const.}$$

- Punktmasside süsteeme, kus kehtib mehaanikalise energia jäävuse seadus nimetatakse *konservatiivseteks süsteemideks*.