Peatükk 2

Skalaar, vektor, tensor

2.1 Sissejuhatus

Skalaar

- Üks arv, mille väärtus ei sõltu koordinaatsüsteemi (baasi) valikust
- Tüüpiline näide — temperatuur

Vektor

- Füüsikaline suurus, mille korral peale arväärtuse on tähtis ka suund.
- Tüüpilised näited — jõud, kiirus, kiirendus.
- 3D juhul esitatav arvukolmikuna — 3×1 või 1×3 maatriksina.
  - Arvud arvukolmikus sõltuvad baasi valikust.
  - Vektori moodul ja suund on baasist sõltumatu.

Tensor

- Teist järku tensor on füüsikaline suurus, mille korral peale arväärtuste on tähtsad kaks suunda.
- Tüüpilised näited — pingetensor, deformatsioonitensor.
- 3D juhul esitatav 9 arvu abil — 3×3 maatriksina.
  - Arvud maatriksis sõltuvad baasi valikust.
  - Tensor ise on baasist sõltumatu.
- Teisest küljest ("matemaatiliselt") on teist järku tensor $\mathbf{T}$ defineeritud kui lineaarteisendus, mis kujutab vektori $\mathbf{u}$ vektoriks $\mathbf{v}$, i.e.

$$\mathbf{T}: \qquad \mathbf{u} \to \mathbf{v}, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \qquad \text{ehk} \qquad \mathbf{T}[\mathbf{u}] = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v},$$

  kus punkt $\cdot$ tähistab tensori $\mathbf{T}$ sisekorrutist[1] vektoriga $\mathbf{u}$.
- Vektor — esimest järku tensor; skalaar — null-järku tensor

[1] Punktkorrutis, skalaarkorrutis. I. k. *inner product, dot product, scalar product.*

2.2 Vektoralgebra

- *Tähistus:*
  trükitud tekstides tavaliselt rasvases püstkirjas, näiteks $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$;
  käsitsi kirjutades nool või kriips tähe kohal või all.
- *Vektori pikkus ehk arvväärtus ehk moodul*[2] $a = |\mathbf{a}|$
- Vektori $\mathbf{A}$ suunaline *ühikvektor* $\mathbf{i}_\mathbf{A}$

$$\mathbf{i}_\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}}{A}; \qquad \mathbf{A} = A\mathbf{i}_\mathbf{A} \tag{2.1}$$

- *Nullvektor* $\mathbf{0}$ (tavaliselt kirjutatakse lihtsalt 0).
- *Liitmise ja skalaariga korrutamise omadused:* kommutatiivsus, assotsiatiivsus ja distributiivsus.
- *Lineaarselt sõltuvad vektorid*:
  Vektoreid $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ nimetatakse lineaarselt sõltuvateks kui saab leida arvud $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nii, et $\beta_1\mathbf{A}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{A}_n = 0$, kus kõik $\beta_i \neq 0$. Vastasel juhul on tegu lineaarselt sõltumatute vektoritega.

[2] I. k. *magnitude*

– Kui 2 vektorit on lineaarselt sõltuvad, siis on nad kollineaarsed.
– Kui 3 vektorit on lineaarselt sõltuvad, siis on nad komplanaarsed.
– 3D ruumis on 4 või enam vektorit alati lineaarselt sõltuvad.

2.2.1 Korrutised

Skalaarkorrutis ehk sisekorrutis[3]

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = AB \cos\theta$,
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ ja tegurid pole nullvektorid $\Rightarrow \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A \cdot A = A^2$.
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}$ on vektori $\mathbf{A}$ ortogonaalne projektsioon ühikvektori $\mathbf{i}$ sihile.
- Ühikvektorite skalaarkorrutis võrdub nende vahelise nurga koosinusega: $\mathbf{i_1} \cdot \mathbf{i_2} = \cos(\widehat{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2})$

[3] I. k. *scalar product, inner product, dot product*

Vektorkorrutis[4]

- Vektorkorrutis $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ on vektor, mille orientatsioon on määratud parema käe reegliga ja mille moodul võrdub vektoritele $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ehitatud rööpküliku pindalaga. Joonis loengus!
- Näited
  jõu moment punkti suhtes $\boldsymbol{\mathcal{M}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$,
  pöörleva keha punkti kiirus $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$
- Omadused:
  antikommutatiivsus: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
  distributiivsus: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ jne. Tegurite järjekord!
  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ ja tegurid pole nullvektorid $\Rightarrow \mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$

[4] I. k. *cross product, vector product, skew product, outer product*, neist 2 viimast on harvemini kasutatavad

Kolmekordsed korrutised[5]

Vaatleme kolme tüüpi korrutisi: $\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$, $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ ja $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

- $\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ korral on tulemuseks skalaariga $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ korrutatud vektor $\mathbf{A}$
- *Segakorrutis*[6] $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\equiv\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ on skalaar, mis võrdub vektoritele $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ ehitatud rööptahuka ruumalaga. NB! $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ tehete järjekord!
  - *Segakorrutise omadused:*
    $\cdot$ ja $\times$ järjekorda võib vahetada, st. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=[\mathbf{ABC}]$;
    tsükliline permutatsioon: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{A}$, kuid $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=-\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{C}=-\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{A}$;
    kui $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=0$, siis on $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ komplanaarsed.

[5] I. k. *Triple products*
[6] I. k. *scalar triple product* (ilmselt on veel i.k. vasteid)

- *Kolmekordne vektorkorrutis*[7] $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ on vektor, mis on risti vektoritega $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ ning asub järelikult vektoritega $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ määratud tasandil.
  - Saab näidata, et
    $$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \tag{2.2}$$
  - Sulge ei saa ära jätta ja järjekorda vahetada:
    $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\neq(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$

2.2.2 Tasapind kui vektor

Vektori $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ moodul on võrdne vektorite $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ poolt moodustatud rööpküliku pindalaga. Lisaks on vektor $\mathbf{C}$ selle rööpküliku normaaliks ja seega ka $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ poolt määratud tasandi normaaliks. Enamgi veel, $\mathbf{C}$ määrab vaadeldava tasapinna orientatsiooni — parema käe kolmik, kruvireegel jne.

[7] I. k. *vector triple product*

Toodud mõttekäik on üldistatav suvalise kujuga tasapinnalisele kujundile.

- Ühiknormaal $\mathbf{n}$ määrab pinna orientatsiooni
- Pind on esitatav vektorina $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$, kus S on vtl. pinna pindala.

Näited. (Lahendatakse loengus)

- Silindri põhja pindala on S_0 ja põhja ühiknormaal $\mathbf{n}_0$. Määrata silindri lõikamisel tasandiga, mille ühiknormaal on $\mathbf{n}$ tekkinud kujundi pindala S.
- Vaatleme koordinaattasandite (DKR) lõikamisel kaldpinnaga tekkinud tetraeedrit. Tekkinud kaldpinna pindala on S ja normaal $\mathbf{n}$. Määrata tetraeedri ülejäänud 3 tahu pindalad läbi kaldpinna pindala.

2.2.3 Vektori komponendid

- Valime baasivektoriteks kolm meelevaldset lineaarselt sõltumatut vektorit $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, mis moodustavad parema käe kolmiku.
- Nüüd saame avaldada suvalise vektori $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i}_1 + A_2\mathbf{i}_2 + A_3\mathbf{i}_3$. joonis loengus
- $A_1\mathbf{i}_1, A_2\mathbf{i}_2, A_3\mathbf{i}_3$ vektori $\mathbf{A}$ *vektorkomponendid*.
- A_1, A_2, A_3 vektori $\mathbf{A}$ *skalaarkomponendid*.
- Kui PKM-s räägitakse vektori komponentidest, siis peetakse tavaliselt silmas just skalaarkomponente.

2.2.4 Summeerimiskokkulepe

Summeerimiskokkuleppe põhjal kirjutatakse avaldis

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{i}_i$$

kujul

$$\mathbf{a} = a_i\mathbf{i}_i. \tag{2.3}$$

- Indeksit i nimetatakse *summeerimisindeksiks*[8].
- Summeerimiskokkulepe kujul (2.3) kehtib vaid Descartes'i ristkoordinaatide (DRK)[9] korral. Muude koordinaatide korral on olukord „pisut" keerulisem, sest üks indeks on ülal ja teine all — näiteks: $\mathbf{a} = a^i\mathbf{g}_i$.
- Summeerimisindeksina võib kasutada suvalist sümbolit, mis pole vtl. avaldises veel kasutusel:

$$\mathbf{a} = a_i\mathbf{i}_i = a_m\mathbf{i}_m = a_r\mathbf{i}_r = \dots$$

[8] I. k. *dummy index*
[9] I. k. *Cartesian coordinates*

- Sumeerimisindeks tohib korduda ühes liidetavas (liikmes) ainult 2 korda — $a_ib_ic_i$ pole lubatud ega oma seega mõtet.
- *Vaba indeks* esineb avaldises kummalgi pool võrdusmärki vaid ühe korra.

$$a_i = b_jc_jd_i$$

  i on vaba indeks, mille asemel võib kasutada suvalisi teisi „vabu" tähti.
- 3D juhul eeldatakse, et indeksid omavad väärtusi 1, 2 ja 3 ning 2D juhul väärtusi 1 ja 2.
- Kui ei soovita summeerida, siis joonitakse indeks alla, näiteks $C_{\underline{K}\,\underline{K}}$ ja $b_{\underline{i}\,\underline{i}}$

2.2.5 Kroneckeri delta ja permutatsiooni sümbol

Kroneckeri delta on defineeritud läbi DRK baasivektorite:

$$\delta_{ij} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \begin{cases} 1, \text{kui } i = j, \\ 0, \text{kui } i \neq j. \end{cases} \tag{2.4}$$

Näited:

- $a_i\delta_{ij} = a_j$
- $a_i b_j \delta_{ij} = \dots$
- $\delta_{ij}\delta_{ik} = \dots$
- δ_{ij} võib nimetada ühikmaatriksi analoogiks

Permutatsiooni sümbol on defineeritud järgmiselt:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i, j, k \text{ on arvujada 1, 2, 3 paaris permutatsioon} \\ -1, & \text{kui } i, j, k \text{ on arvujada 1, 2, 3 paaritu permutatsioon} \\ 0, & \text{kui } i, j, k \text{ on korduvad} \end{cases} \tag{2.5}$$

- $e_{123} = e_{312} = e_{231} = 1$
- $e_{321} = e_{132} = e_{213} = -1$
- muul juhul $e_{ijk} = 0$
- $e_{ijk} = e_{kij} = e_{jki}$

- Vektorkorrutis: NB! DRK!

$$\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j = e_{ijk}\mathbf{i}_k = e_{kij}\mathbf{i}_k = e_{jki}\mathbf{i}_k \tag{2.6}$$

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i\mathbf{i}_i) \cdot (b_j\mathbf{i}_j) = \dots$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_i\mathbf{i}_i) \times (b_j\mathbf{i}_j) = \dots$
- nn. *$e - \delta$ samasus*

$$e_{ijk}e_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{2.7}$$

NÄITED LOENGUS ...

2.2.6 Koordinaatteisendused

Vaatleme kahte komplekti DRKe x_1, x_2, x_3 ja X_1, X_2, X_3, millele vastavad baasivektorid $\mathbf{i}_i$ ja $\mathbf{I}_i$. Tähistame vektori $\mathbf{A}$ vastavaid komponente (projektsioone) a_i ja A_i

$$\mathbf{A} = \begin{cases} a_i\mathbf{i}_i = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_i)\mathbf{i}_i, \\ A_j\mathbf{I}_j = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}_j)\mathbf{I}_j. \end{cases} \tag{2.8}$$

Siit saame

$$A_j = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I}_j = (a_i\mathbf{i}_i)\cdot\mathbf{I}_j = a_i(\mathbf{i}_i\cdot\mathbf{I}_j) = q_{ij}a_i, \tag{2.9}$$

kus

$$q_{ij} = \mathbf{i}_i\cdot\mathbf{I}_j = \cos\left(\widehat{\mathbf{i}_i, \mathbf{I}_j}\right). \tag{2.10}$$

On selge, et q_{ij} pole sümmeetriline. •

2.3 Maatriksite teooria

- Liitmine ja skalaariga korrutamine ning nende tehete omadused ...
- Transponeerimine ...
  - sümmeetriline maatriks: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
  - anti- ehk kaldsümmeetriline maatriks[10] $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$
- Korrutamine ja selle omadused
  - Üldjuhul $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$
  - Normaalmaatriks[11] : $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}$
  - Ortogonaalmaatriks[12] : $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$, st. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$
  - $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T$
  - ...

[10] I. k. *skew symmetric matrix*
[11] I. k. *normal matrix*
[12] I. k. *orthogonal matrix*

- Maatriksi $\mathbf{A}$ determinant $\det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}|$
  - Indekskirjaviisis $\surd$

$$|\mathbf{A}| = e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \tag{2.11}$$

või

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{lmn} A_{il} A_{jm} A_{kn} \tag{2.12}$$

- Maatriksi $\mathbf{A}$ elemendi A_{ij} *miinor* $M_{ij}(\mathbf{A})$ on determinant, mis on saadud maatriksist $\mathbf{A}$, kui sealt kõrvaldada i-s rida ja j-s veerg.

- Maatriksi $\mathbf{A}$ elemendi A_{ij} *algebraline täiend*[13]

$$\text{cofactor}(A_{ij}) = (-1)^{i+j} M_{ij}(\mathbf{A}) \tag{2.13}$$

- *Pöördmaatriks*

$$A_{ij}{}^{-1} = \frac{\text{cofactor} A_{ji}}{|\mathbf{A}|} \tag{2.14}$$

NB! transponeerimine: cofactorA_{ji}

- *Singulaarne maatriks:* $\det \mathbf{A} = 0$

[13] I. k. *cofactor*

- Determinantide omadused
  - $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$
  - $\left|\mathbf{A}^{-T}\right| = |\mathbf{A}|$
  - $|\alpha \mathbf{A}| = \alpha^n |\mathbf{A}|, \quad$ kus n on ridade (veergude) arv
  - ...

2.4 Tensor vrs. maatriks

Vektorit ja 3×1 maatriksit ning tensorit ja 3×3 maatriksit ei tohi segi ajada.

- Kui fikseerida koordinaatsüsteem, siis saab iga vektori esitada 3×1 maatriksina ja iga teist järku tensori 3×3 maatriksina. Kuid erinevates koordinaatsüsteemides vastavad samale vektorile või tensorile erinevad maatriksid.
- *Iga tensor on seega esitatav maatriksina, kuid iga maatriks ei esita tensorit.* Millal 3×3 maatriks komponentidega A_{ij} esitab tensorit?
  - Olgu meil ühes koordinaatsüsteemis kaks 3×1 maatriksit komponentidega a_i ja b_i ning 3×3 maatriks komponentidega A_{ij} ning $b_i = A_{ij} a_j$.
  - Teisendamisel mingisse teise koordinaatsüsteemi saame uued maatriksid komponentidega $\hat{a}_i$, $\hat{b}_i$ ja $\hat{A}_{ij}$.
  - Kui $\hat{b}_i = \hat{A}_{ij} \hat{a}_j$, siis esitab 3×3 maatriks komponentidega A_{ij} tensorit.

2.5 Vektor- ja tensoranalüüs[14]. . .

. . . leiab käsitlemist töö käigus.

[14]I. k. *Vector - and tensor calculus*