

Peatükk 3

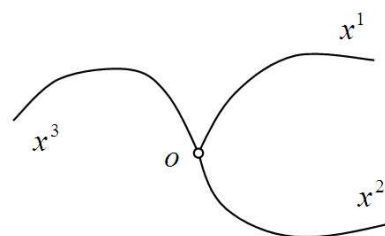
Deformeeruva keskkonna kinemaatika

3.1 Euleri ja Lagrange'i koordinaadid

Pideva keskkonna mehaanikas on liikumise kirjeldamisel kasutusel kahte liiki koordinaadid: *Euleri – ja Lagrange'i koordinaadid*. Esmalt defineerime nad üldiste kõverjooneliste koordinaatidena.

Euleri koordinaadid

Toome sisse ajas muutumatu kõverjooneliise koordinaatsüsteemi x^1, x^2, x^3 , mille suhtes vaadeldakse keskkonna materiaalsete punktide liikumist. Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse *Euleri koordinaatsüsteemiks ehk ruumiliseks koordinaatsüsteemiks* ning vastavaid punkti koordinaate x^1, x^2, x^3 — *Euleri koordinaatideks (EK) ehk ruumilisteks koordinaatideks*. Ühe punktmassi liikumist Euleri koordinaatsüsteemis kirjeldavad kolm võrrandit

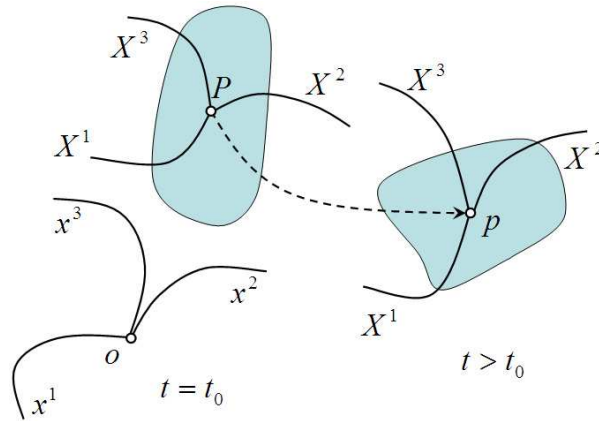


Joonis 3.1: Euleri koordinaadid

$$x^i = f^i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Lagrange'i koordinaadid

Fikseerime ajahetkel $t = t_0$ keskkonna materiaalsete punktide asendi ja seome nendega kõverjoonelise koordinaatsüsteemi X^1, X^2, X^3 . Kui nüüd ajahetkel $t > t_0$ keskkond liigub ja muudab kuju, siis liigub ja muudab kuju ka koordinaatsüsteem X^1, X^2, X^3 . Sellist koordinaatsüsteemi nimetatakse



Joonis 3.2: Lagrange'i koordinaadid

Lagrange'i koordinaatsüsteemiks ehk materiaalseteks

koordinaatsüsteemiks ning vastavaid punkti koordinaate X^1, X^2, X^3 — *Lagrange'i koordinaatideks (LK) ehk materiaalseteks koordinaatideks*.

Lagrange'i koordinaadid deformeeruvad koos kehaga.

Descartes'i ristkoordinaadid (DRK)¹

Käesoleva kursuse algul esitame kõik PKM võrrandid DRKs ja seega pole vaja eristada alumisi ja ülemisi indekseid. Seetõttu tähistame DRK korral EK x_1, x_2, x_3 ning vastavaid baasivektoreid $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ ja \mathbf{i}_3 . Kui vaja, siis täpsustame, et meil on Euleri Descartes'i ristkoordinaadid (EDRK).

Kõiki suurusi, mis on esitatud EKs tähistame väikeste tähtedega. Mõned näited:

- ruumipunkti p kohavektor: $\mathbf{p} \equiv \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$
- punkti kiirus EKs: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} \equiv \dot{\mathbf{x}} = (v_1, v_2, v_3)$
- punkti kiirendus EKs: $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{p}} \equiv \ddot{\mathbf{x}} = (a_1, a_2, a_3)$
- pingetensori komponendid: t_{ij} ;
Euleri deformatsioonitensori komponendid: e_{ij}
- $x_i, v_i, a_i, f_i, c_{ij} \dots$

¹DRK pole EK ja LK kõrval kolmas koordinaatide tüüp, vaid annab ühe võimaluse esitada EK ja LK.

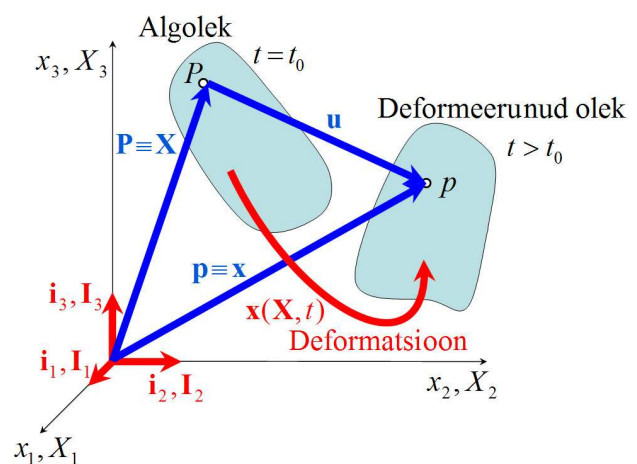
Lagrange'i koordinaate tähistame DRK korral X_1, X_2, X_3 ning vastavaid baasivektoreid $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ ja \mathbf{I}_3 .

Kõiki suurusi, mis on esitatud LKs tähistame suurte tähtedega. Mõned näited:

- materiaalse punkti P kohavektor: $\mathbf{P} \equiv \mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$
- punkti kiirus LKs: $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{P}} \equiv \dot{\mathbf{X}} = (V_1, V_2, V_3)$
- punkti kiirendus LKs: $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{P}} \equiv \ddot{\mathbf{X}} = (A_1, A_2, A_3)$
- pingetensori komponendid: T_{IJ} ; Lagrange'i deformatsioonitensori komponendid: E_{IJ}
- $X_I, V_I, A_I, F_I, C_{IJ} \dots$

3.2 Liikumise kirjeldamine

Üldjuhul eeldatakse, et keha (keskkond) on alghetkel $t = t_0$ deformeermata olekus², nn. *algolekus*. Välismõjude toimel hakkab keha deformeeruma ja kui vaadelda mingit hetke $t > t_0$ siis on keha *deformeerunud olekus*³ (joon. 3.3). Tihti öeldakse, et alghetkel hõlvab keha (materiaalne maht⁴ \mathcal{V} , mida ümbritseb materiaalne pind⁵ \mathcal{S}) ruumi piirkonna B . Deformeerunud olekus hõlvab vaadeldav keha ruumi piirkonna b ((ruumi)mahu v , mida ümbritseb (ruumi)pind s).



Joonis 3.3: Deformatsioon, algolek ja deformeerunud olek.

²I. k. *reference configuration*

³I. k. *deformed configuration, actual configuration*

⁴I. k. *material volume*

⁵I. k. *material surface*

Materiaalse punkti P kohavektor

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{X} = X_K \mathbf{I}_K, \quad (3.2)$$

ruumipunkti kohavektor

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{x} = x_k \mathbf{i}_k \quad (3.3)$$

ja siirdevektor

$$\mathbf{u} = u_k \mathbf{i}_k = U_K \mathbf{I}_K. \quad (3.4)$$

Liikumisseaduseks nimetatakse üheparameetrilist koordinaatide teisendust

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{ehk} \quad x_k = x_k(X_1, X_2, X_3, t) \quad (3.5)$$

või tema pöördteisendust

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \text{ehk} \quad X_K = X_K(x_1, x_2, x_3, t), \quad (3.6)$$

mis siirdab materiaalse punkti P ruumipunkti p . Parameetriks on siin aeg t . Alghetkel $t = t_0$ kujutavad teisendused (3.5) ja (3.6) (parameetrist sõltumatuid) koordinaatteisendusi.

Tihti on kasulik kui $t = t_0$ puhul teljestikud x_k ja X_K ühtiksid, st., hetkel $t = t_0$ $x_k = X_K$ kui $k = K$. Sel juhul on materiaalse punkti asukoht alghetkel $t = t_0$ automaatselt teada ning asukoha muutus algasendi suhtes on hetkel $t > t_0$ lihtsalt leitav (vt. joon. 3.3).

Märkused:

- On ilmne, et kuna LK liiguvad (deformeeruvad) koos kehaga, siis üldjuhul on nad DRK vaid alghetkel.
- Väga sageli esitatakse liikumisseadus (3.5) kujul $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$.

Teisendused (3.5) ja (3.6) peavad olema teineteise ühesed pöördteisendused. * Eeldame, et nii funktsioon (3.5) kui (3.6) kuuluvad klassi C^r , $r \geq 1$. Vastavalt matemaatilisest analüüsist tuntud teoreemile ilmutamata funktsioonist on see tingimus täidetud ruumipunkti p ümbruses δ parajasti siis, kui jakobiaan

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right| \neq 0 \quad |x_k - x_k^0| < \delta. \quad (3.7)$$

Siin x_k^0 , $k = 1, 2, 3$ on ruumipunkti p koordinaadid ja

$$\left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right| = \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial X_1 & \partial x_1/\partial X_2 & \partial x_1/\partial X_3 \\ \partial x_2/\partial X_1 & \partial x_2/\partial X_2 & \partial x_2/\partial X_3 \\ \partial x_3/\partial X_1 & \partial x_3/\partial X_2 & \partial x_3/\partial X_3 \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

Tingimus (3.7) väljendab tegelikult pidevuse aksiooni, mille põhjal positiivne \dagger lõplik aine maht ei saa deformeeruda nullmahuks ega lõpmata suureks mahuks⁶ ning ükski ainehulk ei tungi teise ainehulga sisse⁷. Teisisõnu, joon deformeerub alati jooneks, pind pinnaks ja maht mahuks.

Kui keskkonnas esineb katkevusi (näit. kihiline materjal või praod), pole eeltoodu otseselt kasutatav ja tuleb sisse tuua lisatingimusi. Samuti tuleb erilist tähelepanu pöörata võimalikele singulaarsetele punktidele, joontele või/ja pindadele, kus tingimus (3.7) pole täidetud.

Funktsioonide (3.5) ja (3.6), st., liikumisseaduste leidmine ongi üks pideva keskkonna mehaanika põhiülesandeid.

⁶ik. *indestructibility of matter*

⁷ik. *impenetrability of matter*

Kui liikumine on kirjeldatud avaldistega (3.5), siis öeldakse, et on antud *liikumise Lagrange'i kirjeldus* — antud juhul saame teada, millises ruumipunktis x_k asub materiaalne punkt X_K hetkel t . Kui $t = t_0$ puhul EK ja LK ühtisid, siis saame liikumisseadusest (3.5) teada, millises ruumipunktis asub hetkel t see materiaalne punkt, mis alghetkel oli ruumipunktis $x_k = X_K$ ($k = K$). Lagrange'i kirjeldust on otstarbekas kasutada deformeeruva tahke keha ülesannete puhul, sest siin keha peaasjalikult vaid deformeerub välisjõudude toimel ning tema materiaalsed punktid ei paigutu ruumis oluliselt ümber. Kui fikseerime materiaalse punkti X_K , siis avaldistest (3.5) saame tema liikumisseaduse kujul

$$x_k = f_k(t), \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

Avaldised (3.6) esitavad *liikumise Euleri kirjelduse* — nende põhjal saab määrata materiaalse punkti X_K , mis hetkel t asub ruumipunktis x_k . Seda moodust on mõistlik kasutada näiteks hüdrodünaamika ülesannete puhul, sest vedeliku “osakesed” (materiaalsed punktid) paigutuvad ruumis oluliselt ümber. Kui fikseerime ruumipunkti x_k , siis saab liikumisseadus (3.6) kuju

$$X_K = F_K(t), \quad K = 1, 2, 3 \quad (3.10)$$

ja esitab materiaalseid punkte, mis liiguvad läbi selle fikseeritud ruumipunkti. •

Näide 3.2.1. *Liikumise Lagrange'i kirjeldus*

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2(e^t - 1), \\ x_2 = X_1(e^{-t} - 1) + X_2, \\ x_3 = X_3. \end{cases}$$

Liikumise Euleri kirjeldus

$$\begin{cases} X_1 = \frac{-x_1 + x_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}}, \\ X_2 = \frac{x_1(e^{-t} - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}}, \\ X_3 = x_3. \end{cases}$$

Alghetkel LK ja EK ühtivad. Kas liikumine on üheselt määratud?

Jakobiaan

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right| = \dots$$

...

3.3 Siirdeväli ja deformatsioonigradient

3.3.1 Siire

Vastavalt joonisele 3.3 on *punkti P siire*

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{P} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (3.11)$$

Siirdevektor on liikumisseaduste (3.5) ja (3.6) abil avaldatav nii LKs kui EKs:

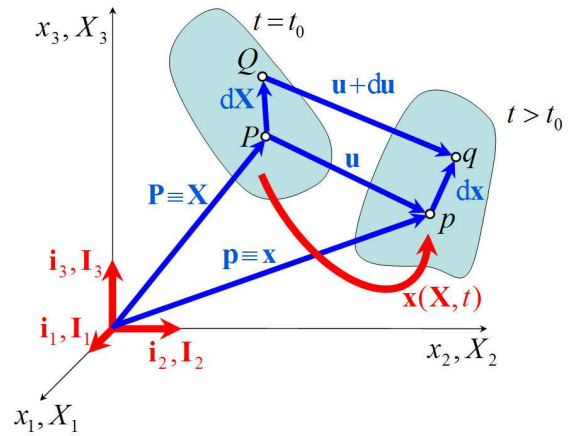
$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = U_K \mathbf{I}_K, \quad U_K = x_k(X_1, X_2, X_3, t) - X_K, \quad \text{kus } k = K \quad (3.12)$$

ja

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = u_k \mathbf{i}_k, \quad u_k = x_k - X_K(x_1, x_2, x_3, t), \quad \text{kus } k = K. \quad (3.13)$$

Valem (3.12) esitab siiret, mille on hetkeks t saanud materiaalne punkt \mathbf{X} ja valem (3.13) määrab siirde, mille on saanud materiaalne punkt, mis hetkel t asub ruumpunktis \mathbf{x} .

Vaatleme joonist 3.4. Materiaalse punkti P kohavektori \mathbf{X} diferentsiaal $d\mathbf{X}$ viib materiaalsest punktist P punkti Q . Ruumipunkti p kohavektori \mathbf{x} diferentsiaal $d\mathbf{x}$ viib ruumipunktist p punkti q . Deformatsiooni käigus siirdub materiaalne punkt P ruumipunkti p , materiaalne punkt Q ruumipunkti q ja vektor $d\mathbf{X}$ deformeerub vektoriks $d\mathbf{x}$. Punktist P viib punkti p vektor \mathbf{u} ja punktist Q punkti q vektor $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$.



Joonis 3.4:

Diferentsiaalid $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$ on vaadeldavad kui lõpmata väikese pikkusega joonelemendid, mille pikkuste ruudud

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_K dX_K \quad (3.14)$$

ja

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_k dx_k \quad (3.15)$$

mängivad edaspidi tähtsat rolli.

3.3.2 Deformatsioonigradiend

Järgnevalt toome sisse deformatsioonigradiendi mõiste ja defineerime viimase abil deformatsioonitensordid. Diferentsiaalid $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$ on omavahel seotud järgmiselt:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (3.16)$$

kus tensorit

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \nabla_0 \mathbf{x} \quad (3.17)$$

nimetatakse *deformatsioonigradiendiks* ja ∇_0 on gradientoperaator \mathbf{X} suhtes. Seose (3.16) pöördteisendus avaldub kujul

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (3.18)$$

kus

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \equiv \nabla \mathbf{X}, \quad (3.19)$$

ja ∇ on gradientoperaator \mathbf{x} suhtes.

Deformatsioonigradiendid \mathbf{F} ja \mathbf{F}^{-1} kujutavad endast nn. *kahepunktilisi tensorvälju*, st. nad teisenevad kui tensorid nii \mathbf{x} kui \mathbf{X} suhtes.

Indekskirjaviisis saame tensorid \mathbf{F} ja \mathbf{F}^{-1} esitada kujul

$$F_{kK} = x_{k,K} \equiv \frac{\partial x_k(X_1, X_2, X_3, t)}{\partial X_K} \quad \text{ja} \quad F_{Kk}^{-1} = X_{K,k} \equiv \frac{\partial X_K(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}, \quad (3.20)$$

kus *indeksis esinev koma tähistab osatuletise võtmist vastavalt avaldisele (3.20)*.

Indekskujul saavad avaldised (3.16) ja (3.18) kuju

$$dx_k = x_{k,K} dX_K \quad \text{ja} \quad dX_K = X_{K,k} dx_k. \quad (3.21)$$

Valemite (3.7) ja (3.8) põhjal saame öelda, et jakobiaan $j = |\mathbf{F}|$.

Maatrikskujul

$$[\mathbf{F}] = [x_{k,K}] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad [\mathbf{F}^{-1}] = [X_{K,k}] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Osatuletise leidmise ahelreegli põhjal:

$$x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{kl} \quad \text{ja} \quad X_{K,k} x_{k,L} = \delta_{KL}. \quad (3.23)$$

Seega, $x_{k,K}$ ja $X_{K,k}$ on teineteise pöördtensorid ja analoogiliselt pöördmaatriksi leidmise eeskirjale

$$X_{K,k} = \frac{\text{cofactor } x_{k,K}}{j} = \frac{1}{2j} e_{KLM} e_{klm} x_{l,L} x_{m,M} \quad (3.24)$$

ning

$$x_{k,K} = \frac{\text{cofactor } X_{K,k}}{j} = \frac{1}{2j} e_{klm} e_{KLM} X_{L,l} X_{M,m}, \quad (3.25)$$

kus jakobiaan

$$j = |x_{k,K}| = \frac{1}{6} e_{KLM} e_{klm} x_{k,K} x_{l,L} x_{m,M}. \quad (3.26)$$

Viimast diferentseerides saadakse *Jacobi samasus*

$$\frac{\partial j}{\partial x_{k,K}} = \text{cofactor } x_{k,K} = j X_{K,k}. \quad (3.27)$$

3.4 Deformatsioonitensorid

3.4.1 Cauchy ja Greeni deformatsioonitensorid

DRK korral on kohavektorite \mathbf{X} ja \mathbf{x} diferentsiaalid avaldatavad kujul

$$d\mathbf{X} = dX_K \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = dx_k \mathbf{i}_k \quad (3.28)$$

Valemite (3.21) põhjal saame anda viimastele kuju

$$d\mathbf{X} = dx_k \mathbf{c}_k \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = dX_K \mathbf{C}_K, \quad (3.29)$$

kus vektorid

$$\mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} X_{K,k} \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} x_{k,K} \mathbf{i}_k \quad (3.30)$$

on käsitletavad kui „uued baasivektorid”. Valemite (3.28)–(3.30) põhjal on selge, et

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_K &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X_K} & \text{ja} & \quad \mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_k} \\ \mathbf{C}_K &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_K} & \text{ja} & \quad \mathbf{c}_k = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Definitsioonidest (3.30) saame omakorda avaldada DRK baasivektorid

$$\mathbf{I}_K = x_{k,K} \mathbf{c}_k(\mathbf{x}, t) \quad \text{ja} \quad \mathbf{i}_k = X_{K,k} \mathbf{C}_K(\mathbf{X}, t). \quad (3.32)$$

Pärast uute baasivektorite \mathbf{c}_k ja \mathbf{C}_K sissetoomist saame kohavektorite $\mathbf{X} \equiv \mathbf{P}$ ja $\mathbf{x} \equiv \mathbf{p}$ diferentsiaalid avaldada neljal (2+2) erineval moel:

$$d\mathbf{X} = \underbrace{\mathbf{I}_K dX_K}_{\text{i}} = \underbrace{\mathbf{c}_k dx_k}_{\text{ii}} \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{i}_k dx_k}_{\text{iii}} = \underbrace{\mathbf{C}_K dX_K}_{\text{iv}}; \quad (3.33)$$

i määrab muutuva suuruse $d\mathbf{X}$ alghetkel (kui $t = t_0$),

ii määrab $d\mathbf{X}$ muutumise seadus EK-s (muutumatud koordinaadid),

iii määrab $d\mathbf{x}$ igal ajahetkel, sest EK on (ajas) muutumatud koordinaadid ja \mathbf{x} on ruumipunkti kohavektor,

iv määrab muutumatu suuruse $d\mathbf{x}$ muutuvates koordinaatides X_K suvalisel hetkel $t \geq t_0$.

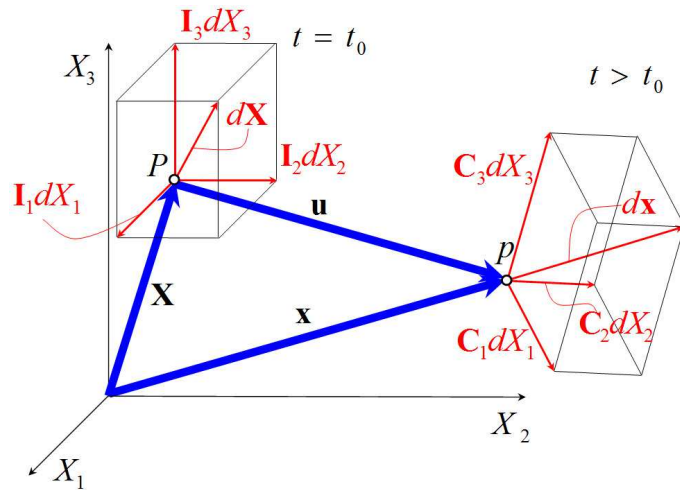
Märkus:

Näiv vastuolu valemis (3.33) (ning ka eelnevates ja järgnevates valemities) EK ja LK vahel kõrvaldatakse liikumisseaduste (3.5) ja (3.6) abil.

Valemid (3.30) ja (3.32) annavad deformatsioonigradiendile järgmise tõlgenduse:

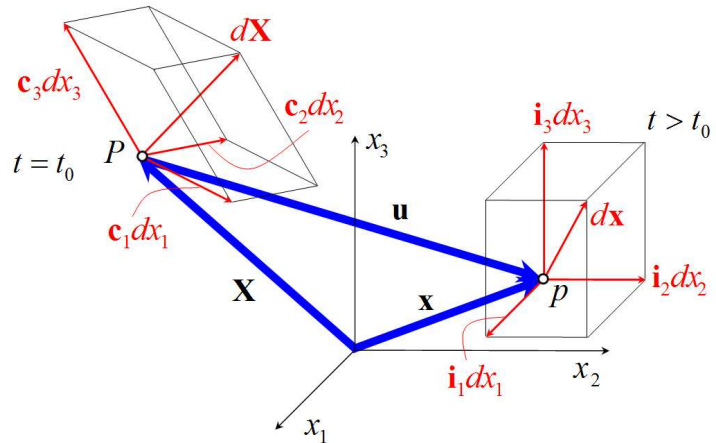
- deformatsioonigradiend $F_{kK} \equiv x_{k,K}$ teisendab baasivektori \mathbf{i}_k uueks baasivektoriks \mathbf{C}_K ja uue baasivektori \mathbf{c}_k tagasi DRK baasivektoriks \mathbf{I}_K
- deformatsioonigradiend $F_{Kk}^{-1} \equiv X_{K,k}$ teisendab baasivektori \mathbf{I}_K uueks baasivektoriks \mathbf{c}_k ja uue baasivektori \mathbf{C}_K tagasi DRK baasivektoriks \mathbf{i}_k

Deformatsiooni käigus muutub vektor $d\mathbf{X}$ vektoriks $d\mathbf{x}$. Lagrange'i kirjelduse korral võib seda protsessi näitlikustada joonisel 3.5 kujutatud moel: algse risttahuka servavektorid $\mathbf{I}_1 dX_1$, $\mathbf{I}_2 dX_2$ ja $\mathbf{I}_3 dX_3$ on viidud (kõverjoonelise) rööptahuka servavektoriteks $\mathbf{C}_1 dX_1$, $\mathbf{C}_2 dX_2$ ja $\mathbf{C}_3 dX_3$.



Joonis 3.5: Algse risttahuka deformeerumine rööptahukaks.

Euleri kirjelduse korral saame vektori $d\mathbf{X}$ deformatsiooni vektoriks $d\mathbf{x}$ visualiseerida joonisel 3.6 kujutatud moel: algse rööptahuka servavektorid $\mathbf{c}_1 dx_1$, $\mathbf{c}_2 dx_2$ ja $\mathbf{c}_3 dx_3$ muutuvad deformatsiooni käigus risttahuka servavektoriteks $\mathbf{i}_1 dx_1$, $\mathbf{i}_2 dx_2$ ja $\mathbf{i}_3 dx_3$.



Joonis 3.6: Algse rööptahuka deformeerumine risttahukaks.

Lähtudes vektorite \mathbf{c}_k ja \mathbf{C}_K definitsioonidest saame avaldada

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \stackrel{(3.29)}{=} c_{kl} dx_k dx_l \quad \text{ja} \quad ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \stackrel{(3.29)}{=} C_{KL} dX_K dX_L, \quad (3.34)$$

kus

$$c_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l \stackrel{(3.30)}{=} \delta_{KL} X_{K,k} X_{L,l} = X_{K,k} X_{K,l} \quad (3.35)$$

ja

$$C_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L \stackrel{(3.30)}{=} \delta_{kl} x_{k,K} x_{l,L} = x_{k,K} x_{k,L}. \quad (3.36)$$

Tensorit c_{kl} nimetatakse *Cauchy deformatsioonitensoriks*⁸ ja C_{KL} *Greeni deformatsioonitensoriks*.⁹ Mõlemad nad on sümmeetrilised ja positiivselt määratud.¹⁰

Ülesanne. Kuidas esitada Cauchy ja Greeni deformatsioonitensordid (3.35) ja (3.36) valemitega (3.17) ja (3.19) esitatud deformatsioonigradientide \mathbf{F} ja \mathbf{F}^{-1} abil?

Arvestades valemeid (3.22) ...

⁸I. k. *Cauchy's deformation tensor*

⁹I. k. *Green's deformation tensor*

¹⁰ $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} > 0$

3.4.2 Fingeri ja Piola deformatsioonitensordid

Toome nüüd sisse vektorite \mathbf{c}_k ja \mathbf{C}_K pöördvektorid ehk kaasvektorid¹¹

$$\bar{\mathbf{c}}_k^{-1}(\mathbf{x}, t) = x_{k,K} \mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad \bar{\mathbf{C}}_K^{-1}(\mathbf{X}, t) = X_{K,k} \mathbf{i}_k, \quad (3.37)$$

mille korral

$$\mathbf{c}_k \cdot \bar{\mathbf{c}}_l^{-1} = \dots = \delta_{kl} \quad \text{ja} \quad \mathbf{C}_K \cdot \bar{\mathbf{C}}_L^{-1} = \dots = \delta_{KL}. \quad (3.38)$$

Vektorite $\bar{\mathbf{c}}_k^{-1}$ ja $\bar{\mathbf{C}}_K^{-1}$ abil defineeritakse *Fingeri ja Piola deformatsioonitensordid*: †

$$\bar{c}_{kl}^{-1} = \bar{\mathbf{c}}_k^{-1} \cdot \bar{\mathbf{c}}_l^{-1} = \delta_{KL} x_{k,K} x_{l,L} = x_{k,K} x_{l,K} \quad (3.39)$$

ja

$$\bar{C}_{KL}^{-1} = \bar{\mathbf{C}}_K^{-1} \cdot \bar{\mathbf{C}}_L^{-1} = \delta_{kl} X_{K,k} X_{L,l} = X_{K,k} X_{L,k}. \quad (3.40)$$

Fingeri ja Cauchy deformatsioonitensordid ning Piola ja Greeni deformatsioonitensordid on teineteiste pöördtensorid, st.

$$\bar{c}_{km}^{-1} c_{ml} = \delta_{kl} \quad \text{ja} \quad \bar{C}_{KM}^{-1} C_{ML} = \delta_{KL}. \quad (3.41)$$

¹¹I. k. *reciprocal vectors*

3.4.3 Euleri ja Lagrange'i deformatsioonitensordid

Arvestades kohavektorite diferentsiaalide avaldise (3.28) ja (3.29) ning Cauchy ja Greeni deformatsioonitensorite definitsioone (3.35) ja (3.36) saame avaldada suurused dS^2 ja ds^2 kahel erineval moel:

$$dS^2 = \delta_{KL}dX_KdX_L = c_{kl}dx_kdx_l \quad \text{ja} \quad ds^2 = \delta_{kl}dx_kdx_l = C_{KL}dX_KdX_L. \quad (3.42)$$

Nende vahe $ds^2 - dS^2$ iseloomustab kahe materiaalse punkti vahelise kauguse muutumise deformatsiooni käigus ja seda saab avaldada nii Lagrange kui Euleri koordinaatides:

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL}(\mathbf{X}, t)dX_KdX_L = 2e_{kl}(\mathbf{x}, t)dx_kdx_l, \quad (3.43)$$

kus

$$2E_{KL} = C_{KL}(\mathbf{X}, t) - \delta_{KL} \quad \text{ja} \quad 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl}(\mathbf{x}, t) \quad (3.44)$$

nimetatakse vastavalt *Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensoreks*.¹² Valemi- te (3.35) ja (3.36) põhjal

$$2E_{KL} = x_{k,K}x_{k,L} - \delta_{KL} \quad \text{ja} \quad 2e_{kl} = \delta_{kl} - X_{K,k}X_{K,l}. \quad (3.45)$$

¹²I. k. *Lagrangian and Eulerian strain tensors. NB! strain tensors!*

Võrduse (3.43) põhjal näeme¹³, et

$$E_{KL} = e_{kl}x_{k,K}x_{l,L} \quad \text{ja} \quad e_{kl} = E_{KL}X_{K,k}X_{L,l}. \quad (3.46)$$

Euleri ja Lagrange deformatsioonitensorite esitamine siirete kaudu

Joonise 3.3 (või 3.4) põhjal siire

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = x_i\mathbf{i}_i - X_I\mathbf{I}_I. \quad (3.47)$$

Siirdevektor avaldub oma komponentide kaudu nii LKs kui EKs:

$$\mathbf{u} = U_K\mathbf{I}_K = u_k\mathbf{i}_k. \quad (3.48)$$

Komponentide U_K ja u_k avaldamiseks korrutame avaldist (3.47) baasivektoritega \mathbf{i}_k või \mathbf{I}_K :

$$u_k = x_k - \delta_{Ik}X_I \quad \text{ja} \quad U_K = \delta_{iK}x_i - X_K, \quad (3.49)$$

kus suurus

$$\delta_{Kk} = \delta_{kK} = \mathbf{I}_K \cdot \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{I}_K \quad (3.50)$$

nimetame *vahetajaks*¹⁴ ja nad on Kroneckeri deltad vaid juhul kui alghetkel † $K = k$ korral $\mathbf{i}_k = \mathbf{I}_K$.

¹³Näidata kodus ja eksamil

¹⁴I. k. *shifter*; *shift* – nihe, vahetus; *gear shift* – käiguvahetus

- Kui asendame avaldisse (3.49)₁ liikumisseaduse $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, siis saame siirde, mille on saanud materiaalne punkt, mis hetkel t asub ruumpunktis \mathbf{x} .
- Kui asendame avaldisse (3.49)₂ liikumisseaduse $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, siis saame siirde, mille on saanud materiaalne punkt \mathbf{X} . Eeldusel, et alghetkel EK ja LK ühtivad, on tegu materiaalse punktiga, mis alghetkel asub ruumpunktis $\mathbf{x} = \mathbf{X}$.

Avaldame vektorid \mathbf{C}_K ja \mathbf{c}_k siirete kaudu:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_K &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_K} \stackrel{(3.47)}{=} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X_K} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_K} = \mathbf{I}_K + U_{M,K} \mathbf{I}_M, \\ \mathbf{c}_k &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_k} \stackrel{(3.47)}{=} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k - u_{m,k} \mathbf{i}_m.\end{aligned}\tag{3.51}$$

Suurusi $U_{M,K}$ ja $u_{m,k}$ nimetame *siirdegradientideks*.

Nüüd saamegi avaldada deformatsioonitensorid siiretes:

$$\begin{cases} C_{KL} = \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L = \dots = \delta_{KL} + U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L}, \\ c_{kl} = \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l = \dots = \delta_{kl} - u_{k,l} - u_{l,k} + u_{m,k} u_{m,l} \end{cases}\tag{3.52}$$

ja

$$\begin{cases} 2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L}, \\ 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k} u_{m,l}. \end{cases}\tag{3.53}$$

Veel mõned valemid kohavektorite diferentsiaalide jaoks:

$$\begin{cases} d\mathbf{x} = \mathbf{C}_K dX_K \stackrel{(3.51)}{=} (\delta_{MK} + U_{M,K}) \mathbf{I}_M dX_K, \\ d\mathbf{X} = \mathbf{c}_k dx_k \stackrel{(3.51)}{=} (\delta_{mk} + u_{m,k}) \mathbf{i}_m dx_k. \end{cases}\tag{3.54}$$

Korrutades viimased vastavalt vektoritega \mathbf{i}_k ja \mathbf{I}_K saame diferentsiaalide komponendid

$$\begin{cases} dx_k = (\delta_{MK} + U_{M,K}) \delta_{Mk} dX_K, \\ dX_K = (\delta_{mk} + u_{m,k}) \delta_{mK} dx_k. \end{cases}\tag{3.55}$$

3.5 Lõpmata väikesed deformatsioonid ja pöörded

3.5.1 Lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid

Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid olid defineeritud avaldistega (3.53) kujul

$$\begin{cases} 2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K}U_{M,L}, \\ 2e_{kl} = \delta_{KL} - c_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k}u_{m,l}. \end{cases}$$

Kui siirdegradiendid on väikesed võrreldes ühega, siis

$$U_{M,K}U_{M,L} \ll U_{K,L} \ll 1. \quad (3.56)$$

Hüljates kõrgemat järku lõpmata väikesed liikmed, saame *lõpmata väikeste deformatsioonide tensorid*¹⁵

$$\begin{cases} 2\tilde{E}_{KL} = 2\tilde{E}_{LK} = U_{K,L} + U_{L,K}, \\ 2\tilde{e}_{kl} = 2\tilde{e}_{lk} = u_{k,l} + u_{l,k}. \end{cases} \quad (3.57)$$

Selliseid deformatsioonitensoreid kasutatakse lineaarses teoorias, mida on kombeks nimetada klassikaliseks teooriaks.

¹⁵Neid nimetatakse ka lihtsalt väikeste deformatsioonide tensoriteks „unustades” sõna *lõpmata* lisamata.

3.5.2 Lineaarse teooria pöördetensorid ja pöördevektorid

Siirdevektori diferentsiaalid avalduvad läbi siirdegradientide kujul

$$dU_K = U_{K,L}dX_L \quad \text{ja} \quad du_k = u_{k,l}dx_l. \quad (3.58)$$

Siirdegradiendi saab lahutada sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks osaks:

$$\begin{cases} U_{K,L} = \frac{1}{2} [(U_{K,L} + U_{L,K}) + (U_{K,L} - U_{L,K})], \\ u_{k,l} = \frac{1}{2} [(u_{k,l} + u_{l,k}) + (u_{k,l} - u_{l,k})]. \end{cases} \quad (3.59)$$

Esimesed sulgavaldised kujutavad siin klassikalise lineaarse teooria deformatsioonitensoreid $\tilde{E}_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K}$ ja $\tilde{e}_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k}$, teised aga tähistame

$$\tilde{R}_{KL} = \frac{1}{2}(U_{K,L} - U_{L,K}) = -\tilde{R}_{LK} \quad \text{ja} \quad \tilde{r}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} - u_{l,k}) = -\tilde{r}_{lk} \quad (3.60)$$

Viimased on *klassikalise, st. lineaarse, teooria pöördetensorid*.

Seega kujutavad \tilde{E}_{KL} ja \tilde{e}_{kl} siirdegradientide $U_{K,L}$ ja $u_{k,l}$ sümmeetrilisi osi, \tilde{R}_{KL} ja \tilde{r}_{kl} aga antisümmeetrilisi osi ning

$$U_{K,L} = \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \quad \text{ja} \quad u_{k,l} = \tilde{e}_{kl} + \tilde{r}_{kl}. \quad (3.61)$$

Sagedasti kasutatakse selles kontekstis tähistusi

$$\tilde{E}_{KL} = U_{(K,L)}, \quad \tilde{e}_{kl} = u_{(k,l)}, \quad \tilde{R}_{KL} = U_{[K,L]}, \quad \tilde{r}_{kl} = u_{[k,l]}. \quad (3.62)$$

Siin tähistavad $U_{(K,L)}$ ja $u_{(k,l)}$ vastavalt siirdegradientide $U_{K,L}$ ja $u_{k,l}$ sümmeetrilisi osi ja $U_{[K,L]}$ ja $u_{[k,l]}$ antisümmeetrilisi osi.

Igas keha punktis saame defineerida *lõpmata väikese pöörde vektorid* $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{r}_k \mathbf{i}_k$ ja $\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{R}_K \mathbf{I}_K$, kus

$$2\tilde{R}_K = e_{KLM} \tilde{R}_{ML}, \quad \text{ja} \quad 2\tilde{r}_k = e_{klm} \tilde{r}_{ml}. \quad (3.63)$$

Ülesanne 3.5.1. Näidata, et

$$\tilde{r}_1 = \tilde{r}_{32}, \quad \tilde{r}_2 = \tilde{r}_{13}, \quad \tilde{r}_3 = \tilde{r}_{21}. \quad (3.64)$$

Euleri ja Lagrange deformatsioonitensorite ja lõpmata väikeste deformatsioonide ning -pöörete tensorite vahelised seosed.

Asendades siirdegradiendid (3.61) deformatsioonitensorite avaldistesse (3.53) saame pärast mõningaid teisendusi

$$\begin{cases} E_{KL} = \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} (\tilde{E}_{MK} + \tilde{R}_{MK}) (\tilde{E}_{ML} + \tilde{R}_{ML}), \\ e_{kl} = \tilde{e}_{kl} - \frac{1}{2} (\tilde{e}_{mk} + \tilde{r}_{mk}) (\tilde{e}_{ml} + \tilde{r}_{ml}). \end{cases} \quad (3.65)$$

Viimaste valemite põhjal on selge, et \tilde{e}_{kl} ei sobi hästi deformatsiooni mõõduks, sest $\tilde{e}_{kl} = 0$ puhul ei pruugi e_{kl} olla null. Sama kehtib ka Lagrange'i deformatsioonitensori E_{KL} kohta. Valemite (3.65) põhjal on tuletatud mitmeid ligikaudseid teooriaid, eriti plaatidele ja koorikutele.

- Kui $\tilde{e}_{kl} \ll 1$ (kuid \tilde{r}_{kl} on lõplik), siis hüljatakse vaid liikmed $\tilde{e}_{mk} \tilde{e}_{ml}$.
- Kui nii $\tilde{e}_{kl} \ll 1$ kui $\tilde{r}_{kl} \ll 1$, siis hüljatakse liikmed $\tilde{e}_{mk} \tilde{e}_{ml}$, $\tilde{e}_{mk} \tilde{r}_{ml}$ ja $\tilde{r}_{mk} \tilde{r}_{ml}$.
- Jne. sõltuvalt tensorite elementide suurusjärgust.

Lõpmata väikeste deformatsioonide teoorias eeldatakse, et $E_{KL} = \tilde{E}_{kl}$ ja $e_{kl} = \tilde{e}_{kl}$. Enamgi veel, kuna deformatsioonid on lõpmata väikesed, siis tegelikult ei eristatagi sel juhul Lagrange'i ja Euleri koordinaate ja seosed (3.46) saavad kuju

$$\tilde{E}_{KL} = \tilde{e}_{kl}\delta_{kK}\delta_{lL} \quad \text{ja} \quad \tilde{e}_{kl} = \tilde{E}_{KL}\delta_{Kk}\delta_{Ll}. \quad (3.66)$$

3.6 Deformatsioonitensorite füüsikaline sisu¹⁶

Vaatleme lõpmata väikeseid vektoreid $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$, mis on (3.33) avaldatavad järgmiselt:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{I}_K dX_K = \mathbf{c}_k dx_k \quad \text{ja} \quad d\mathbf{x} = \mathbf{i}_k dx_k = \mathbf{C}_K dX_K. \quad (3.67)$$

Kuna

$$dS^2 = |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{ja} \quad ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \quad (3.68)$$

siis $d\mathbf{X}$ ja $d\mathbf{x}$ sihilised ühikvektorid

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{X}}{|d\mathbf{X}|} = \frac{d\mathbf{X}}{dS} \quad \text{ehk} \quad N_K = \frac{dX_K}{|d\mathbf{X}|} = \frac{dX_K}{dS} \quad (3.69)$$

¹⁶Mõnes õpikus nimetatakse sama asja ka geomeetriliseks interpretatsiooniks või geomeetriliseks tähenduseks

ja

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad \text{ehk} \quad n_k = \frac{dx_k}{|d\mathbf{x}|} = \frac{dx_k}{ds}. \quad (3.70)$$

Suhet ds/dS nimetame *pikenemiskoeffitsendiks* ehk lihtsalt *pikenemiseks*¹⁷ ja see väljendab vektorite $d\mathbf{x}$ ja $d\mathbf{X}$ pikkuste suhet. Seda suhet võib väljendada nii \mathbf{N} kui \mathbf{n} kaudu. Vastavalt sellele, kas viitame \mathbf{N} või \mathbf{n} suunale, tähistame pikenemist kas $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ või $\lambda_{(\mathbf{n})}$. On selge, et arvuliselt $\Lambda_{(\mathbf{N})} = \lambda_{(\mathbf{n})}$, kuid $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ viitab LKle ja $\lambda_{(\mathbf{n})}$ EKle. Seega, $\Lambda_{(\mathbf{N})}$ leidmiseks avaldame (3.67) abil vektori $d\mathbf{x}$ LKs:

$$\Lambda_{(\mathbf{N})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{\mathbf{C}_K dX_K \mathbf{C}_L dX_L}{dS^2}} = \dots = \sqrt{C_{KL} N_K N_L}. \quad (3.71)$$

$\lambda_{(\mathbf{n})}$ leidmise puhul toimime vastupidi — avaldame vektori $d\mathbf{X}$ EKs:

$$\lambda_{(\mathbf{n})} = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{ds^2}{\mathbf{c}_k dx_k \mathbf{c}_l dx_l}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{c_{kl} n_k n_l}}. \quad (3.72)$$

¹⁷i. k. *stretch*

Kui valime $\mathbf{N} = \mathbf{I}_1$ ja $\mathbf{n} = \mathbf{i}_1$ ning tähistame $\Lambda_{(\mathbf{N})} = \Lambda_{(1)}$ ja $\lambda_{(\mathbf{n})} = \lambda_{(1)}$, siis $N_1 = n_1 = 1$ ja $N_2 = N_3 = n_2 = n_3 = 0$ ning

$$\Lambda_{(1)} = \sqrt{C_{11}} \quad \text{ja} \quad \lambda_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{c_{11}}}. \quad (3.73)$$

Kokkuvõttes¹⁸

$$C_{\underline{K}\underline{K}} = \Lambda_{(K)}^2 \quad \text{ja} \quad (c_{\underline{k}\underline{k}})^{-1} = \lambda_{(k)}^2, \quad (3.74)$$

s.t. *Cauchy deformatsioonitensori diagonaalelementide pöördväärtused ja Greeni deformatsioonitensori diagonaalelemendid võrduvad baasivektorite sihiliste joonelementide (vektorite) pikenemiskoeffitsientide ruuduga.*

*Suhteline pikenemine*¹⁹ on defineeritud järgmiselt:

$$\mathbf{E}_{(\mathbf{N})} = \epsilon_{(\mathbf{n})} = \frac{ds - dS}{dS} = \Lambda_{(\mathbf{N})} - 1 = \lambda_{(\mathbf{n})} - 1 \quad (3.75)$$

Kui tähistame suhtelist pikenemist vektori $\mathbf{N} = \mathbf{I}_1$ sihis $\mathbf{E}_{(1)}$, siis

$$\mathbf{E}_{(1)} = \Lambda_{(1)} - 1 = \sqrt{C_{11}} - 1 \stackrel{(3.44)}{=} \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1. \quad (3.76)$$

¹⁸Alljoon indeksi juures tähistab seda, et selle korduva indeksi järgi ei summeerita.

¹⁹I. k. *extention*

Viimasest saame

$$2E_{11} = (1 + \mathbf{E}_{(1)})^2 - 1 = \Lambda_{(1)}^2 - 1 = \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}. \quad (3.77)$$

Kokkuvõttes:

$$2E_{\underline{K}\underline{K}} = (1 + \mathbf{E}_{(K)})^2 - 1 = \Lambda_{(K)}^2 - 1 = \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2}. \quad (3.78)$$

Kui $\mathbf{E}_{(K)} \ll 1$, siis saame avaldisest (3.78) kõrgemat järku väikeste suuruste hülgamisel

$$E_{\underline{K}\underline{K}} \approx \tilde{E}_{\underline{K}\underline{K}} \approx \mathbf{E}_{(K)} = \frac{ds - dS}{dS}. \quad (3.79)$$

Teisisõnu, *lõpmata väikeste deformatsioonide korral on suhteline pikenemine baasivektori \mathbf{I}_K suunas võrdne lõpmata väikeste deformatsioonide tensori diagonaalelementidega $\tilde{E}_{\underline{K}\underline{K}}$.*

Analoogilised valemid EK jaoks saavad kuju

$$\begin{cases} \epsilon_{(k)} = \lambda_{(k)} - 1 = \frac{1}{\sqrt{c_{kk}}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2e_{kk}}} - 1, \\ 2e_{kk} = 1 - (1 + \epsilon_{(k)})^{-2} = 1 - \lambda_{(k)}^{-2} = \frac{ds^2 - dS^2}{ds^2}, \\ e_{kk} \approx \tilde{e}_{kk} \approx \epsilon_{(k)}, \quad \text{kui } \epsilon_{(k)} \ll 1. \end{cases} \quad (3.80)$$

Deformatsioonitensori komponentidele E_{KL} tähenduse andmiseks vaatleme kahte ristuvat vektorit $\mathbf{I}_1 dX_1$ ja $\mathbf{I}_2 dX_2$, mis deformeeruvad vektoriteks $\mathbf{C}_1 dX_1$ ja $\mathbf{C}_2 dX_2$ (vt. joon. 3.5), mille vaheline nurk on $\vartheta_{(1,2)}$. Seega, †

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_{(1,2)} &= \frac{(\mathbf{C}_1 dX_1) \cdot (\mathbf{C}_2 dX_2)}{|\mathbf{C}_1 dX_1| |\mathbf{C}_2 dX_2|} = \frac{(\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2) dX_1 dX_2}{|\mathbf{C}_1| |\mathbf{C}_2| |dX_1| |dX_2|} \\ &= \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}} \stackrel{(3.44)}{=} \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Kasutades avaldist (3.76) saame viimasest

$$2E_{12} = (1 + E_{(1)}) (1 + E_{(2)}) \cos \vartheta_{(1,2)}. \quad (3.82)$$

Kui suhtelised pikenemised $E_{(1)} \ll 1$ ja $E_{(2)} \ll 1$, siis

$$2E_{12} = 2\tilde{E}_{12} \approx \cos \vartheta_{(1,2)}. \quad (3.83)$$

Vektorite \mathbf{I}_1 ja \mathbf{I}_2 vahelise täisnurga muutus avaldub kujul

$$\Gamma_{(1,2)} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{(1,2)}. \quad (3.84)$$

On selge, et $\sin \Gamma_{(1,2)} = \cos \vartheta_{(1,2)}$. Kui $\Gamma_{(1,2)} \ll 1$, siis $\sin \Gamma_{(1,2)} = \cos \vartheta_{(1,2)} \approx \Gamma_{(1,2)}$ ja

$$2E_{12} = 2\tilde{E}_{12} \approx \Gamma_{(1,2)}. \quad (3.85)$$

Kokkuvõttes: kui $\Gamma_{(K,L)} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{(K,L)}$ on vektorite \mathbf{I}_K ja \mathbf{I}_L vahelise algse täisnurga muut, siis

$$\begin{cases} 2E_{KL} = (1 + E_{(K)}) (1 + E_{(L)}) \cos \vartheta_{(K,L)} = (1 + E_{(K)}) (1 + E_{(L)}) \sin \Gamma_{(K,L)}, \\ 2E_{KL} \approx 2\tilde{E}_{KL} \approx \cos \vartheta_{(K,L)} = \sin \Gamma_{(K,L)}, & \text{kui } E_{(K)} \ll 1, E_{(L)} \ll 1, \\ 2E_{KL} \approx 2\tilde{E}_{KL} \approx \Gamma_{(K,L)}, & \text{kui } \Gamma_{(K,L)} \ll 1. \end{cases} \quad (3.86)$$

Analoogilise mõttekäigu rakendamine Euleri deformatsioonitensorile e_{kl} ei annaks nii praktilist tulemust, sest $\vartheta_{(k,l)}$ tähistaks nurka, mis deformatsiooni käigus muutub täisnurgaks, ja $\gamma_{(k,l)}$ vastavat muutust.

Lõpmata väikeste deformatsioonid korral aga kaob erinevus LK ja EK vahel ning vastavalt seostele (3.66) võime kirjutada

$$2\tilde{E}_{KL} \approx 2\tilde{e}_{kl} \approx \Gamma_{(K,L)} \approx \gamma_{(k,l)}, \quad \text{kui} \quad K = k, L = l. \quad (3.87)$$

Seega, lõpmata väikeste deformatsioonide tensorite komponendid \tilde{E}_{KL} ja \tilde{e}_{kl} ($K \neq L$ ja $k \neq l$) on (ligikaudu) võrdsed DRK baasivektorite \mathbf{I}_K ja \mathbf{I}_L vahelise täisnurga muuduga $\Gamma_{(K,L)} \approx \gamma_{(k,l)}$.

3.7 1D deformatsiooni mõõdud ja nende seos deformatsioonitensoritega

Meenutame elastsusteooria aluste kursuses tehtud tõmbekatset, mille korral katsekeha algpikkusega l_0 pikeneb suuruse δ võrra, omades seega katse lõpul pikkust $l = l_0 + \delta$. Toimunud deformatsiooni iseloomustamiseks võib kasutada erinevaid *deformatsiooni mõõte*²⁰:

- *pikenemiskoeffitsent ehk pikenemine*;²¹

$$\lambda = \frac{l}{l_0} \quad (3.88)$$

- *insenerideformatsioon* (kasutatakse ka termineid *Cauchy deformatsioon* ja *suhteline pikenemine*)²²

$$\varepsilon_e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\delta}{l_0} = \lambda - 1 \quad (3.89)$$

²⁰I. k. *strain measures*

²¹I. k. *stretch, stretch ratio*, võrdle valemitega (3.71) ja (3.72)

²²I. k. *engineering strain, Cauchy strain*, võrdle valemitega (3.75) ja (3.76)

- *logaritmiline deformatsioon* (kasutatakse ka termineid *tegelik deformatsioon* või *Hencky deformatsioon*)²³

$$\varepsilon_{\log} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \dots \approx \frac{\delta}{l_0} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l_0^2} \quad (3.90)$$

- *Lagrange'i deformatsioon* (kasutatakse ka terminit *Greeni deformatsioon*)²⁴

$$\varepsilon_L = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \dots = \frac{\delta}{l_0} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l_0^2} \quad \text{ehk} \quad \varepsilon_L = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \quad (3.91)$$

- *Euleri-Almansi deformatsioon*²⁵

$$\varepsilon_{EA} = \frac{l^2 - l_0^2}{2l^2} = \dots = \frac{\delta}{l} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l^2} \quad \text{ehk} \quad \varepsilon_{EA} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (3.92)$$

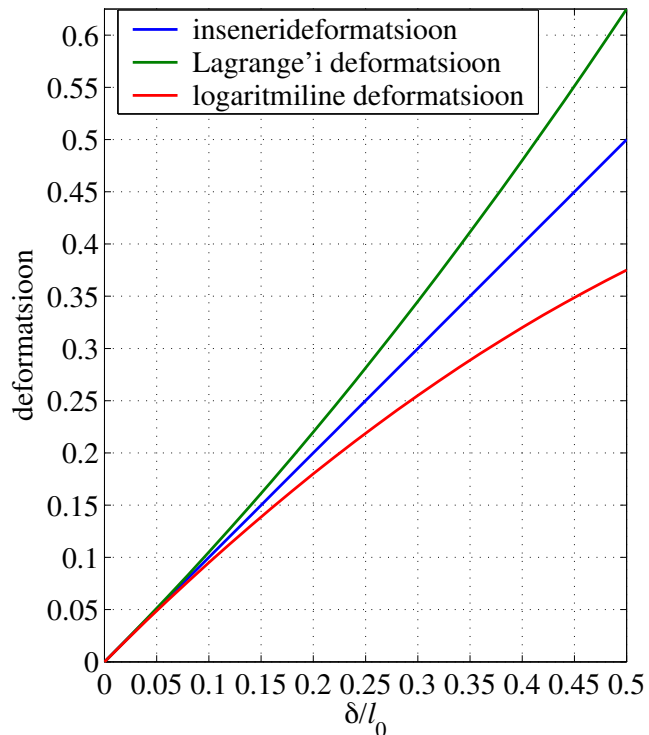
²³I. k. *logarithmic strain, also called natural strain, true strain or Hencky strain*

²⁴I. k. *Lagrange strain, Green strain*

²⁵I. k. *Euler-Almansi strain*

Joonise 3.7 põhjal on selge, et kui $\delta/l_0 < 0, 1$, siis langevad inseneri, Lagrange'i ja logaritmiline deformatsioon praktiliselt kokku. Suurte deformatsioonide korral aga erinevad vaadeldavad kolm deformatsiooni mõõtu oluliselt. Kõige sagedamini kasutatakse suurte deformatsioonide kirjeldamiseks Lagrange'i deformatsiooni.

Euleri-Almansi deformatsiooni korral võrreldakse pikkuse muutu δ deformeerunud katsekeha pikkusega l ja seetõttu on selle deformatsiooni mõõdu otsene võrdlemine vaadel-



Joonis 3.7: Erinevate deformatsioonimõõtude võrdlus

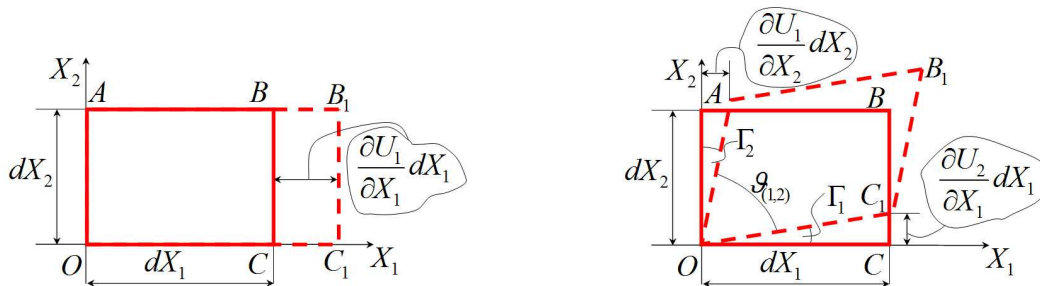
dud kolmikuga komplitseeritud.

Käesolevas kursuses on l_0 analoogiks dS ja l analoogiks ds . Järelikult vastab

- insenerideformatsioonile lõpmata väikesete deformatsioonide tensor $\tilde{E}_{KL} \approx \tilde{e}_{kl}$ (valemid (3.79) ja (3.89)),
- Lagrange'i deformatsioonile Lagrange'i deformatsioonitensor E_{KL} (valemid (3.78) ja (3.91)),
- Euleri-Almansi deformatsioonile aga Euleri deformatsioonitensor e_{kl} (valemid (3.80)₂ ja (3.92)).

Tugevusõpetus ja lineaarne elastsusteooria versus mittelineaarne pideva keskkonna mehaanika. Käesoleva alajaotuse lõpetuseks esitame seosed tugevusõpetuses kasutatud deformatsioonide $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{yz}$ ja lõpmata väikeste deformatsioonide tensori \tilde{E}_{KL} komponentide vahel

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{12} & \tilde{E}_{13} \\ \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22} & \tilde{E}_{23} \\ \tilde{E}_{31} & \tilde{E}_{32} & \tilde{E}_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.93)$$



Joonis 3.8: Normaaldeformatsioon (vasakul) ja nihe ehk nihkedeformatsioon (paremal)

Vastavalt joonisele 3.8 on normaaldeformatsioon²⁶

$$\tilde{E}_{11} = E_{(1)} = \frac{OC_1 - OC}{OC} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \quad (3.94)$$

ja lõpmata väikestele deformatsioonidele vastav nihe ehk nihkedeformatsioon²⁷

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta_{(1,2)} = \Gamma_1 + \Gamma_2 = \frac{\partial U_2}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_2} = 2\tilde{E}_{12}. \quad (3.95)$$

²⁶I. k. *normal strain*

²⁷I. k. *shear or shear strain*

3.8 Deformatsiooniellipsoid

Deformatsiooni iseloomu deformeerumata keha punkti $P(\mathbf{X})$ ümbruses või deformeerunud keha punkti $p(\mathbf{x})$ ümbruses saab illustreerida Cauchy poolt pakutud geomeetrilise meetodi abil. Allpool esitatud tulemused on otseselt rakendatavad suvalisele sümmeetrilisele teist järku tensorile.

Vektor $d\mathbf{X}$ LK-s määrab elementaarsfääri

✓

$$\delta_{KL}dX_KdX_L = dS^2 = K^2, \quad (3.96)$$

kus K on sfääri raadius. Deformeerumisel liigub materiaalne punkt X_K ruumpunkti x_k ja materiaalsed punkti X_K ümbritsenud sfääri punktid ruumpunkti x_k ümbritsevaks teist järku pinna punktideks

$$c_{kl}dx_kdx_l = dS^2 = K^2. \quad (3.97)$$

Valemite (3.35) põhjal $c_{kl} = \delta_{KL}X_{K,k}X_{L,l} = X_{K,k}X_{K,l}$. Kuna c_{kl} on positiivselt määratud, siis see teist järku pind on ellipsoid. Ellipsoidi (3.97) nimetatakse *materiaalseks deformatsiooniellipsoidiks*²⁸.

²⁸I. k. *material strain ellipsoid*

Analoogiliselt — elementaarsfäärile deformeerunud olekus

$$\delta_{kl}dx_kdx_l = ds^2 = k^2 \quad (3.98)$$

vastab ellipsoid algolekus

$$C_{KL}dX_KdX_L = ds^2 = k^2. \quad (3.99)$$

Avaldisega (3.99) määratud ellipsoidi nimetatakse *ruumiliseks deformatsiooniellipsoidiks*²⁹ (ruumiline viitab siin endiselt EK-le, mitte aga 3D-le).

Vaatleme kahte vektorit $d\mathbf{X}^1 \perp d\mathbf{X}^2$, st. $d\mathbf{X}^1 \cdot d\mathbf{X}^2 = 0$. Kuna vektorid $d\mathbf{X}^\alpha$ on avaldatavad nii baasi \mathbf{I}_K kui \mathbf{c}_k kaudu, siis

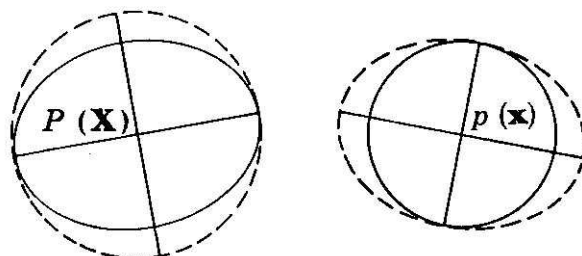
•

$$d\mathbf{X}^1 \cdot d\mathbf{X}^2 = \dots = c_{kl}dx_k^1dx_l^2 = 0. \quad (3.100)$$

Seega on meil ka peale deformatsiooni kaks ristuvat vektorit — üks komponentidega $c_{kl}dx_k^1$ ja teine komponentidega dx_l^2 (või vastupidi). Teisisõnu, kaks ristuvat vektorit LK-s deformeeruvad kaheks ristuvaks vektoriks EK-s (sealjures nende vektorite siht ja pikkus võivad muutuda).

²⁹I. k. *spatial strain ellipsoid*

Ellipsoidil on teatavasti 3 ristuvat pooltelge. Eeldame algul, et kõik poolteljed on erineva pikkusega. Seega materiaalse deformatsiooniellipsoidi puhul leidub algses sfääris kolm ristuvat raadiust, mis deformeeruvad ellipsoidi pooltelgedeks. Deformatsiooni käigus muutub nende pikkus ja orientatsioon (siht), kuid nad jäävad omavahel risti. Neid telgi nimetatakse *deformatsiooniellipsoidi peatelgedeks*.



Joonis 3.9: Ruumiline (—) ja materiaalne (- - -) deformatsiooniellipsoid

Kogu toodud mõttekäik kehtib ka ruumilise deformatsiooniellipsoidi kohta. Situdes omavahel ruumilise ja materiaalse deformatsiooniellipsoidi saab näidata, et *deformatsioon pöörab ruumilise deformatsiooniellipsoidi \mathbf{X} -s materiaalseks deformatsiooniellipsoidiks \mathbf{x} -s ja vastupidi*.

Deformatsioon viib sfääri diameetri \mathbf{X} -s ellipsoidi diameetriks \mathbf{x} -s. Ellipsoidi ja sfääri diameetrite pikkuste suhe määrab ära *pikenemiskoeffitsendi* $\Lambda = ds/dS$ vastavas sihis. Pikenemiskoeffitsente kolmes deformatsiooniellipsoidi peatelje sihis nimetatakse *peapikenemisteks* ja tähistatakse $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$, kusjuures $\Lambda_1 = \max \Lambda$ ja $\Lambda_3 = \min \Lambda$.

Eelnev baseerus eeldusel, et ellipsoidi pooltelgede pikkused on erinevad. Vastupidisel juhul saab leida lõpmata palju peatelgi.

- Kaks pooltelge on võrdsed, kolmas erinev ...
- Kõik kolm pooltelge on võrdsed ...

3.9 Deformatsioonitensori invariandid, peaväärtused ja peasuunad

Alajaotuses 3.8 näitasime, et punktis $P(\mathbf{X})$ leidub vähemalt kolm omavahel ristuvat suunda, mis deformatsiooni käigus lähevad deformatsiooniellipsoidi kolmeks peateljeks punktis $p(\mathbf{x})$ ja vastupidi. Määrame nüüd peasuunad analüütiliselt, st., leiame kolm ristuvat suunda, millest kahe puhul pikennemiskoeffitsendid omavad ekstremaalseid väärtusi. Valemite (3.71) põhjal

$$\Lambda_{(\mathbf{N})}^2 = C_{KL}N_KN_L, \quad (3.101)$$

kus $N_K = dX_K/dS$. Peasuundade leidmiseks tuleb minimeerida funktsioon (3.101) \mathbf{N} suhtes lisatingimusel, et \mathbf{N} on ühikvektor, st.,

$$\delta_{KL}N_KN_L = 1. \quad (3.102)$$

Saadud lisatingimusega ekstreemumülesande lahendamiseks kasutame Lagrange'i meetodit³⁰ mille põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\frac{\partial}{\partial N_M} [C_{KL}N_KN_L - C(\delta_{KL}N_KN_L - 1)] = 0, \quad (3.103)$$

³⁰I.k. *Lagrange's method of multipliers*

kus tundmatut C nimetatakse Lagrange'i multiplikaatoriks. Viimane omakorda annab meile kolm lineaarset homogeenet võrrandit ühikvektori komponentide N_K leidmiseks —

$$(C_{KL} - C\delta_{KL})N_L = 0 \quad (3.104)$$

Tensori E_{KL} definitsiooni põhjal $C_{KL} = \delta_{KL} + 2E_{KL}$ saab võrrandeile (3.104) anda kuju

$$(E_{KL} - E\delta_{KL})N_L = 0, \quad 2E = C - 1. \quad (3.105)$$

Pole tähtis kumba saadud võrrandisüsteemidest lahendada — kui vaja, saab hiljem minna ühelt lahendilt üle teisele. Meie lähtume võrrandisüsteemist (3.104). Viimasel eksisteerib mittetriviaalne lahend siis ja ainult siis kui tema *karakteristlik determinant* on null, st.,

$$|C_{KL} - C\delta_{KL}| = 0. \quad (3.106)$$

Selle determinandi arendamise tulemusena saadakse *karakteristlik võrrand* (mis kujutab endast kuupvõrrandit)

$$C^3 - I_C C^2 + II_C C - III_C = 0 \quad (3.107)$$

tundmatu C määramiseks.

Suurused

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I}_C = C_{KK} = \dots \\ \text{II}_C = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} \\ \text{III}_C = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad (3.108)$$

on deformatsioonitensori C_{KL} invariandid (koordinaatteisenduste suhtes $\mathbf{X} - s$).

Karakteristlik võrrand (3.107) omab kolme juurt C_α , $\alpha = 1, 2, 3$, mida nime-
tatakse *peaväärtusteks* ehk *omaväärtusteks*³¹. Võrrandisüsteemi (3.104) abil
saame nüüd igale peaväärtusele C_α seada vastavusse *peavektori* ehk *omavektori*
 \mathbf{N}_α , mis määrab *peasuuna*. Saab tõestada, et sümmeetrilise tensori peaväärtu-
sed on reaalsed ning neile vastavad peasuunad on omavahel risti ja eksisteerivad
alati. •

Geeni deformatsioonitensori peaväärtused järjestatakse selliselt, et $C_1 \geq C_2 \geq C_3$ (põhjendus on esitatud allpool).

³¹Lk. *eigenvalues or principal values or proper numbers*

Kui koordinaadid on valitud peasuundades (st., baasivektorite siht ühtib pea-
vektortite sihtidega igas materiaalses punktis), siis peavektori \mathbf{N}_α komponendid ★

$$N_{K\alpha} = \delta_{K\alpha} \quad (3.109)$$

ja deformatsioonitensori komponendid ✓

$$C_{\alpha K} = C_\alpha \delta_{\alpha K}, \quad (3.110)$$

kus α viitab peaväärtuse numbrile.

Kokkuvõttes võib öelda, et *peaväärtused võrduvad deformatsioonitensori nor-
maalkomponentidega peatelgedes (peadeformatsioonidega). Nihkedeformatsioo-
nid selliste telgede (koordinaatide) puhul puuduvad.*

Deformatsioonitensori invariandid saavad nüüd tunduvalt lihtsamad kujud —

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I}_C = C_1 + C_2 + C_3, \\ \text{II}_C = C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2, \\ \text{III}_C = C_1 C_2 C_3. \end{array} \right. \quad (3.111)$$

Deformatsioonitensori peaväärtuste ja peasuundade ning deformatsiooniellipsoidi peatelgede vaheline seos

Peasuunad \mathbf{N}_α määravad ära deformatsiooniellipsoidi peateljed LK-s \mathbf{X} , st., ruumilise deformatsiooniellipsoidi võrrand saab nüüd kujul

$$ds^2 = k^2 = C_{KL}dX_KdX_L = C_\alpha (dX_\alpha)^2 \equiv \sum_\alpha C_\alpha (dX_\alpha)^2. \quad (3.112)$$

Seega peatelgedes deformatsiooniellipsoidi võrrand lihtsustub.

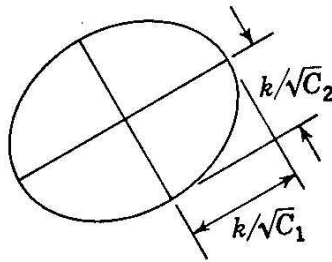
DRK puhul on ellipsoidi poolteljed

$$a_\alpha^s = \frac{ds}{\sqrt{C_\alpha}} \equiv \frac{k}{\sqrt{C_\alpha}} \quad (3.113)$$

ja pikenemiskoeffitsent peatelgedes

$$\Lambda_\alpha = \frac{ds}{dS} = \sqrt{C_{KL}N_KN_L} = \sqrt{C_\alpha} \stackrel{(3.113)}{=} \frac{ds}{a_\alpha^s} \quad (3.114)$$

ning seega $a_\alpha^s = dS$, s.o. \mathbf{N}_α sihilise joonelemendi pikkus.



Joonis 3.10: Ruumilise deformatsiooniellipsoidi poolteljed

EK \mathbf{x} puhul avaldub materiaalne deformatsiooniellipsoid kujul

$$dS^2 = K^2 = c_{kl}dx_kdx_l = c_\alpha (dx_\alpha)^2 \equiv \sum_\alpha c_\alpha (dx_\alpha)^2 \quad (3.115)$$

ja poolteljed DRK-s

$$a_\alpha^m = \frac{dS}{\sqrt{c_\alpha}} \equiv \frac{K}{\sqrt{c_\alpha}}. \quad (3.116)$$

Suurus c_α on siin deformatsioonitensori c_{kl} omaväärtus. Pikenemiskoeffitsendid

$$\lambda_\alpha = \frac{ds}{dS} = \frac{1}{\sqrt{c_{kl}n_kn_l}} = \frac{1}{\sqrt{c_\alpha}} = \frac{a_\alpha^m}{dS} \quad (3.117)$$

ja nüüd seega $a_\alpha^m = ds$, s.o. \mathbf{n}_α sihilise joonelemendi pikkus. Valemite (3.114) ja (3.117) põhjal

$$C_\alpha = \frac{1}{c_\alpha} = \lambda_\alpha^2 \equiv \Lambda_\alpha^2. \quad (3.118)$$

Peaväärtused järjestatakse alati nii, et esimesele peaväärtusele vastab suurim peapikenemine $\lambda_1 \equiv \Lambda_1$ ja kolmandale vähim peapikenemine $\lambda_3 \equiv \Lambda_3$.

Kokkuvõttes:

- Ruumilise deformatsiooniellipsoidi pooltelgede pikkused LK-s \mathbf{X} on pöördvõrdelised materiaalse deformatsiooniellipsoidi pooltelgede pikkustega EK-s \mathbf{x} .
- Samuti on pöördvõrdelised vastavad pea- ehk omaväärtused C_α ja c_α .
- Peaväärtus C_α on võrdne pikenemiskoeffitsendi ruuduga deformatsiooniellipsoidi vastavas peasihis α .
- Peatelgede sihis omab Λ ekstremaalseid väärtusi.
- Tingimuse $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$ põhjal $C_1 \geq C_2 \geq C_3$ ja $c_1 \leq c_2 \leq c_3$.

Seosed Greeni ja Cauchy deformatsioonitensori invariantide vahel

Kuna $C_\alpha = \Lambda_\alpha^2 \equiv \lambda_\alpha^2$ ja $\lambda_\alpha = 1 + e_\alpha$, siis (e_α tähistab siin suhtelist pikenemist vastavalt valemile (3.75))

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I}_C = \text{I}_{\bar{c}} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (1 + e_1)^2 + (1 + e_2)^2 + (1 + e_3)^2, \\ \text{II}_C = \text{II}_{\bar{c}} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 = \\ \quad = (1 + e_1)^2 (1 + e_2)^2 + (1 + e_2)^2 (1 + e_3)^2 + (1 + e_3)^2 (1 + e_1)^2, \\ \text{III}_C = \text{III}_{\bar{c}} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = (1 + e_1)^2 (1 + e_2)^2 (1 + e_3)^2, \\ \text{I}_c = \text{I}_{\bar{C}} = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}, \\ \text{II}_c = \text{II}_{\bar{C}} = \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} + \lambda_2^{-2} \lambda_3^{-2} + \lambda_3^{-2} \lambda_1^{-2}, \\ \text{III}_c = \text{III}_{\bar{C}} = \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} \lambda_3^{-2}. \end{array} \right. \quad (3.119)$$

Siin \bar{C} vastab tensorile \bar{C}_{KL} ja \bar{c} tensorile \bar{c}_{kl} . Samuti on võetud arvesse, et $C_\alpha = \bar{c}_\alpha^{-1}$ ja vastupidi, $c_\alpha = \bar{C}_\alpha^{-1}$.

Otsitavad seosed

$$I_c = \frac{II_C}{III_C}, \quad II_c = \frac{I_C}{III_C}, \quad III_c = \frac{1}{III_C} \quad (3.120)$$

saame valemeist (3.119).

Kuna $0 < \lambda_\alpha < \infty$ siis ka $0 < I, II, III < \infty$. ✓

Deformatsioonide puudumisel (jäiga keha puhul) $e_\alpha = 0$ ja $\lambda_\alpha = 1$, $\alpha = 1, 2, 3$ ning seega

$$I = II = 3 \quad \text{ja} \quad III = 1 \quad (3.121)$$

Seosed Lagrange'i ja Greeni deformatsioonitensori invariantide vahel

Lagrange'i deformatsioonitensori invariantid avalduvad läbi peaväärtuste E_α analoogselt Greeni deformatsioonitensori invariantidega (3.111) —

$$\begin{cases} I_E = E_1 + E_2 + E_3, \\ II_E = E_2E_3 + E_1E_3 + E_1E_2, \\ III_E = E_1E_2E_3. \end{cases} \quad (3.122)$$

Kasutades nüüd valemeid (3.111) ja (3.122) ning arvestades, et valemi (3.105)₂ põhjal $2E_\alpha = C_\alpha - 1$, saame seosed

$$\begin{cases} I_C = 3 + 2I_E, \\ II_C = 3 + 4I_E + 4II_E, \\ III_C = 1 + 2I_E + 4II_E + 8III_E, \\ 2I_E = -3 + I_C, \\ 4II_E = 3 - 2I_C + II_C, \\ 8III_E = -1 + I_C - II_C + III_C. \end{cases} \quad (3.123)$$

Seosed Euleri ja Cauchy deformatsioonitensori invariantide vahel saadakse sidudes tensorite c_{kl} ja e_{kl} invariantid. Tulemuseks on duaalsed seosed eelmistele —

$$\begin{cases} I_c = 3 - 2I_e, \\ II_c = 3 - 4I_e + 4II_e, \\ III_c = 1 - 2I_e + 4II_e - 8III_e. \end{cases} \quad (3.124)$$

Invariantide III_C ja III_c geomeetriline tõlgendus

Vaatleme peatelgede sihilisi joonelemente ds_α ja dS_α . Elementaarruumalad $d\mathcal{V} = dS_1 dS_2 dS_3$ ja $dv = ds_1 ds_2 ds_3$. Kuna

$$\frac{ds_\alpha}{dS_\alpha} = \Lambda_\alpha = \lambda_\alpha,$$

siis

$$\frac{dv}{d\mathcal{V}} = \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{dS_1 dS_2 dS_3} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \stackrel{(3.119)}{=} \sqrt{\text{III}_C} \stackrel{(3.119)}{=} \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}}.$$

Seega

$$dv = \sqrt{\text{III}_C} d\mathcal{V} \quad \text{ja} \quad d\mathcal{V} = \sqrt{\text{III}_c} dv. \quad (3.125)$$

Kokkuvõttes — *invariandid III_C ja III_c iseloomustavad ruumala muutust.*

Ülesanne. Kasutades valemeid (3.7), (3.36) ja (3.108) näidata, et $j^2 = \text{III}_C$.

...

Seega võime valemeid (3.125) kasutada ka kujul $dv = j d\mathcal{V}$ või $d\mathcal{V} = dv/j$.

3.10 Deformatsiooni dekompositsioon

3.10.1 Pöördetensor

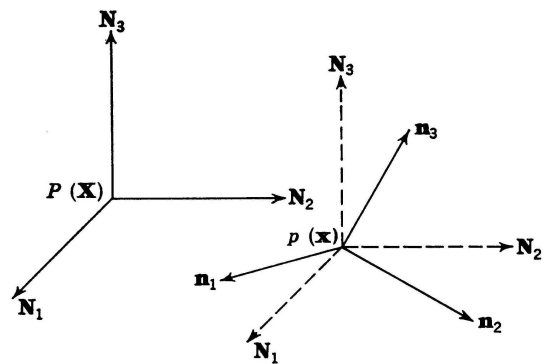
Vaatleme peavektorite kolmikuid \mathbf{n}_α ja \mathbf{N}_α (komponentkujul $n_{k\alpha}$ ja $N_{K\alpha}$). Defineerime pöördetensorid³² \mathbf{R} ja $\bar{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}^{-1}$:

$$n_{k\alpha} = R_{kK} N_{K\alpha}, \quad N_{K\alpha} = \bar{R}_{Kk} n_{k\alpha}. \quad (3.126)$$

Seega pöördetensor R_{kK} pöörab Greeni deformatsioonitensori peavektorid \mathbf{N}_α Cauchy deformatsioonitensori peavektoriteks \mathbf{n}_α ja

vastupidi, pöördetensor \bar{R}_{Kk} pöörab Cauchy deformatsioonitensori peavektorid \mathbf{n}_α Greeni deformatsioonitensori peavektoriteks \mathbf{N}_α . Kuna peavektorid moodustavad ortonormeeritud kolmiku, siis on selge, et

$$n_{k\alpha} n_{\alpha l} = \delta_{kl}, \quad \text{ja} \quad N_{K\alpha} N_{\alpha L} = \delta_{KL}. \quad (3.127)$$



Joonis 3.11: Peatelgede siire koos pöördega

³²maatrikskujul $[\mathbf{R}] = [R_{kK}]$ jne.

Ülesanne. $\mathbf{N}_1 = [0, 1, 0]$, $\mathbf{N}_2 = [-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]$, $\mathbf{N}_3 = [1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]$. Leida maatrikskujul $[N_{K\alpha}]$, $[N_{\alpha K}]$ ja $[N_{K\alpha}N_{\alpha L}]$.

...

Korrutame esimese avaldistest (3.126) komponendiga $N_{\alpha L}$ ja teise komponendiga $n_{\alpha l}$ ning saame

$$R_{kK} = n_{k\alpha}N_{\alpha K} \quad \text{ja} \quad \overset{-1}{R}_{Kk} = N_{K\alpha}n_{\alpha k}. \quad (3.128)$$

Kokkuvõttes:

- Selliselt defineeritud pöördetensor \mathbf{R} on ortogonaalne, st. $\overset{-1}{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$
- Loomulikult kehtivad võrdused $R_{kK}\overset{-1}{R}_{Kl} = \delta_{kl}$ ja $R_{kK}\overset{-1}{R}_{Lk} = \delta_{KL}$.
- Kui peateljed deformatsiooni käigus ei pöördu, siis $R_{kK} = \delta_{kK} = \overset{-1}{R}_{Kk}$ ehk $\mathbf{R} = \mathbf{I} = \overset{-1}{\mathbf{R}}$.

3.10.2 Mõned pöörde- ja deformatsioonitensorite vahelised seosed.

Toupin (1956) tõestas, et

1. Greeni ja Cauchy deformatsioonitensorite n -ndad astmed (kus n võib olla nii positiivne kui negatiivne ja murruline) on seotud järgmiselt

$$\begin{cases} \overset{-n}{C}_{KL} = \overset{-1}{R}_{Kk}\overset{n}{c}_{kl}R_{lL} \\ \overset{-n}{c}_{kl} = R_{kK}\overset{n}{C}_{KL}\overset{-1}{R}_{Ll} \end{cases} \quad (3.129)$$

ning lisaks veel, et

$$\overset{n}{C}_{KL} = \sum_{\alpha} (C_{\alpha})^n N_{\alpha K} N_{\alpha L} \quad \text{ja} \quad \overset{n}{c}_{kl} = \sum_{\alpha} (c_{\alpha})^n n_{\alpha k} n_{\alpha l}. \quad (3.130)$$

2. Deformatsioonigradiendid avalduvad kujul

$$\begin{cases} x_{k,K} = R_{kL}\overset{\frac{1}{2}}{C}_{LK} = R_{lK}\overset{-\frac{1}{2}}{c}_{kl}, \\ X_{K,k} = \overset{-1}{R}_{Kl}\overset{\frac{1}{2}}{c}_{lk} = \overset{-1}{R}_{Lk}\overset{-\frac{1}{2}}{C}_{KL}. \end{cases} \quad (3.131)$$

Viimastest omakorda

$$R_{kK} = x_{k,L} \overset{-\frac{1}{2}}{C}_{LK} \text{ ja } \overset{-1}{R}_{Kk} = X_{K,l} \overset{-\frac{1}{2}}{c}_{lk}. \quad (3.132)$$

Lisaks saab näidata, et siirdegradient

$$U_{L,M} = R_{KL} \overset{\frac{1}{2}}{C}_{LM} - \delta_{KM}, \quad (3.133)$$

tensorite $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ ja \mathbf{R} vahel kehtivad seosed

$$R_{KM} = \left(\delta_{KL} + \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \right) \overset{-\frac{1}{2}}{C}_{LM}, \quad (3.134)$$

väikeste deformatsioonigradientide puhul

$$\tilde{R}_{KM} \approx R_{KM} - \delta_{KM}, \quad (3.135)$$

ja

$$\tilde{R}_{KM} \approx \delta_{kK} \delta_{mM} \tilde{r}_{km}. \quad (3.136)$$

3.10.3 Deformatsiooni dekompositsioon³³

Iga joonelemendi deformatsiooni mingis punktis võib vaadelda koosnevana kolmest osast — 1) paralleellükkest, 2) peatelgede jäigast pöördest ja 3) pikkuse muudust peatelgede sihis.

Vaatleme vektorit dX_K , mis algolekus on esitatud LK-s ja mis deformatsiooni käigus muutub vektoriks $dx_k = x_{k,K} dX_K$. Kasutades seoseid (3.131)₁ saame

$$dx_k = \underbrace{\delta_{kL} R_{LM}}_{R_{kM}} \overset{\frac{1}{2}}{C}_{MK} dX_K = \overset{-\frac{1}{2}}{c}_{kl} \underbrace{R_{lm} \delta_{mK}}_{R_{lK}} dX_K. \quad (3.137)$$

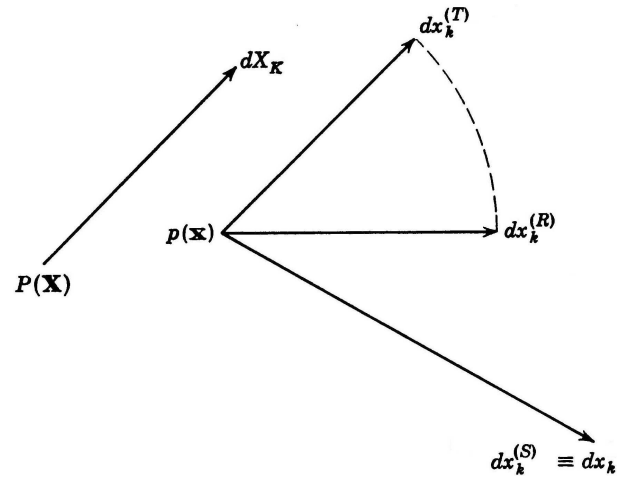
Avaldisele (3.137) saab anda järgmise tõlgenduse (joonis 3.12).

³³Tuntud ka kui pöörde põhiteorem.

1. Vektori $d\mathbf{X}$ paralleellüke³⁴ (koos peatelgedega) vektoriks $d\mathbf{x}^{(T)}$.
2. Vektori $d\mathbf{x}^{(T)}$ jäik pööre³⁵ (koos peatelgedega) vektoriks $d\mathbf{x}^{(R)}$.
3. Läbi peatelgede pikkuste muutmise³⁶ muudetakse vektor $d\mathbf{x}^{(R)}$ vektoriks $d\mathbf{x}^{(S)} = d\mathbf{x}$. Täiendavat pööret ei toimu siin ja ainult siis, kui $d\mathbf{X}$ on paralleelne ühega tensori C_{KL} peavektoritest.

Valemities on eelnev esitatav kujul

$$\begin{cases} dx_k^{(T)} = \delta_{kK} dX_K, \\ dx_k^{(R)} = R_{kl} dx_l^{(T)}, \\ dx_k = \frac{1}{C}{}_{kl} dx_l^{(R)}. \end{cases} \quad (3.138)$$



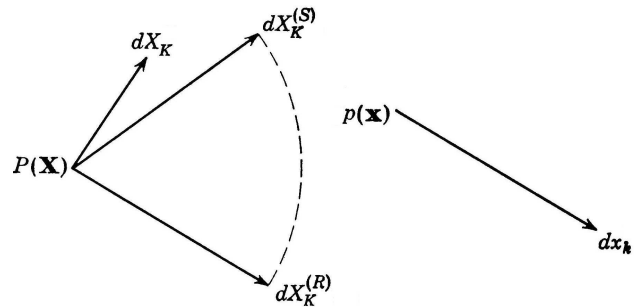
Kui asendame (3.138)₁ → (3.138)₂ → (3.138)₃, siis saame (3.137).

³⁴I.k. translation
³⁵I.k. rotation
³⁶I.k. stretch

Joonis 3.12: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon.

Joonis 3.13 esitab sama protsessi teises järjekorras — pikenemine, pööre, lüke, st.,

$$\begin{cases} dX_M^{(S)} = \frac{1}{C}{}_{MK} dX_K, \\ dX_L^{(R)} = R_{LM} dX_M^{(S)}, \\ dx_k = \delta_{kL} dX_L^{(R)}. \end{cases} \quad (3.139)$$

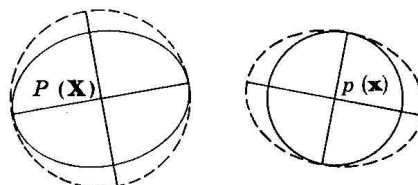


Joonis 3.13: Joonelemendi deformatsiooni dekompositsioon.

Seega sellise dekompositsiooni puhul pole operatsioonide järjekord tähtis.

Eelnev mõttekäik on esitatav ka deformatsiooniellipsoidide kaudu —

1. ...
2. ...
3. ...



3.10.4 Deformatsioonigradiendi polaardekompositsioon

Teine väga levinud lähenemisviis eelmises alajaotuses käsitletule on järgmine. Deformatsioonigradiendile \mathbf{F} rakendatakse polaardekompositsiooni teoreemi ning ta esitatakse kahe tensori (millest üks on ortogonaalne ja teine sümmeetriline ning positiivselt määratud) korrutisena:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \quad (3.140)$$

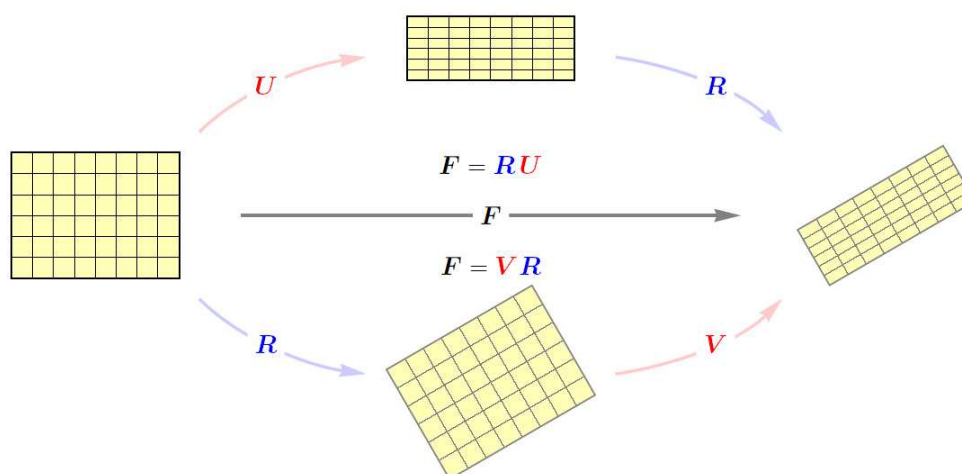
- Avaldise (3.140)₁ tuleb käsitleda kui tensorite \mathbf{U} ja \mathbf{V} definitsioone.
- \mathbf{R} on pöördetensor, \mathbf{U} – parempoolne pikenemistensor³⁷, \mathbf{V} – vasakpoolne pikenemistensor³⁸.
- \mathbf{R} on ortogonaalne, \mathbf{U} ja \mathbf{V} sümmeetrilised ja positiivselt määratud.
- „Vasak” ja „parem” kasutus tuleb sellest, kummalt poolt on vastava tensoriga korrutatud pöördetensorit.

Teatavasti $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$ ja polaardekompositsiooni rakendamist on graafiliselt kujutatud joonisel 3.14.

³⁷I. k. *right stretch tensor*

³⁸I. k. *left stretch tensor*

Polar Decomposition: Graphical Interpretation



Relation between left and right stretch tensors

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T \quad \mathbf{U} = \mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R}$$

Deformatsioonitensorid defineeritakse sel juhul pisut teisiti ja ka deformatsioonitensorite nimed on teised.

Parempoolne Cauchy-Greeni deformatsioonitensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{U}^{-2} \quad (3.141)$$

Vasakpoolne Cauchy-Greeni deformatsioonitensor

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2, \quad \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}^{-2} \quad (3.142)$$

Seosed „senikasutatud” ja „varemdefineeritud”, st. alajaotuses 3.4 defineeritud deformatsioonitensoritega:

- Greeni DT: $C_{KL} \leftrightarrow \mathbf{C}$,
- Piola DT: $\bar{C}_{KL}^{-1} \leftrightarrow \mathbf{C}^{-1}$,
- Fingeri DT: $\bar{c}_{kl}^{-1} \leftrightarrow \mathbf{B}$,
- Cauchy DT: $c_{kl} \leftrightarrow \mathbf{B}^{-1}$.

3.11 Pidevustingimused ehk sobivustingimused³⁹

Kolmemõõtmelises ruumis on deformatsioonitensori kuus (sõltumatut) komponenti seotud siirdevektori kolme komponendiga läbi kuue võrrandi (vt. (3.53) lk.26). Näiteks,

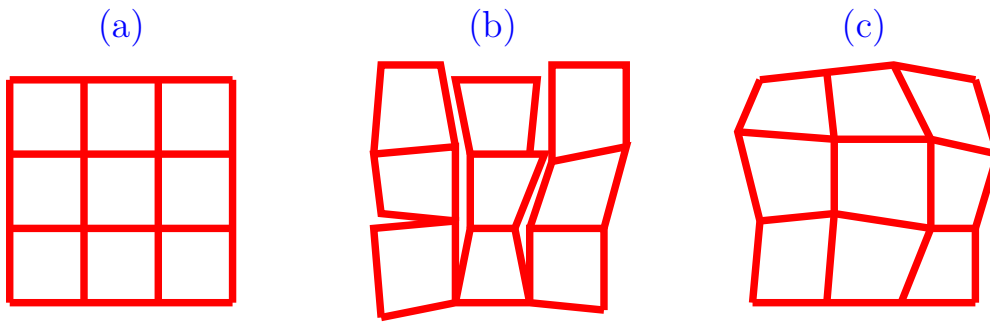
$$2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} = 2E_{LK} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{N,K}U_{N,L}. \quad (3.143)$$

Kui on teada siirdevektori komponendid U_K , siis valemi (3.143) põhjal saab määrata kas tensori C_{KL} või E_{KL} kuus komponenti. Kui aga on vastupidi, st., et teada on tensori C_{KL} või E_{KL} kuus komponenti, siis on meil kolme tundmatu määramiseks kuus võrrandit. Järelikult on meil tegu ülemääratud süsteemiga. Selleks, et siirdekomponendid U_K oleks üheselt määratavad ja pidevad (siirdeväli peab olema üheselt määratud ja pidev) tuleb nüüd deformatsiooni tensori komponentidele peale panna lisatingimused. Neid tingimusi nimetatakse *pidevustingimusteks* ehk *sobivustingimusteks*⁴⁰. Kui siirdekomponendid U_K on ette teada (siirdekomponendid on valitud põhimuutujateks) siis on sobivustingimused automaatselt täidetud. Kui aga põhimuutjateks on deformatsioonitensorid, siis on sobivustingimustel täita oluline roll.

³⁹Sama teemat käsitlesime ka elastsusteooria aluste kursuses, kuid siin on käsitus pisut üldisem.

⁴⁰I.k. *compatibility conditions*

Alternatiivne põhjendus pidevustingimuste sissetoomiseks. Oletame,



Joonis 3.15: Pidevustingimused

et vaadeldav keha on algolekus lõigatud väikesteks kuupideks (joon. 3.15 a). Kui iga kuupi on seejärel eraldi deformeeritud, siis on nende uuesti ühendamine selliselt, et tekkiks pidev keha üldjuhul võimatu (joon. 3.15 b). Selleks, et peale deformatsiooni oleks meil endiselt tegu pideva kehaga (joon. 3.15 c), peavad kuupide deformatsioonid rahuldama teatud tingimusi, mida eestikeelses kirjanduses nimetatakse tavaliselt *pidevustingimusteks*.

Pidevusvõrrandite tuletamine. Tuletame pidevusvõrrandid lõpmata väikeste deformatsioonide tensorile

$$2\tilde{E}_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K}. \quad (3.144)$$

Kirjutame üles viimase kõik sõltumatud komponendid:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{11} &= U_{1,1}, & \tilde{E}_{22} &= U_{2,2}, & \tilde{E}_{33} &= U_{3,3}, \\ 2\tilde{E}_{12} &= U_{1,2} + U_{2,1}, & 2\tilde{E}_{13} &= U_{1,3} + U_{3,1}, & 2\tilde{E}_{23} &= U_{2,3} + U_{3,2}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Diferentseerime võrrandit (3.145)₁ kaks korda koordinaadi X_2 järgi ja võrrandit (3.145)₂ kaks korda koordinaadi X_1 järgi ning liidame saadud tulemused.

$$\tilde{E}_{11,22} + \tilde{E}_{22,11} = U_{1,122} + U_{2,112} = (U_{1,2} + U_{2,1})_{,12} = 2\tilde{E}_{12,12} \quad (3.146)$$

Kombineerides võrrandeid (3.145)₁₋₃ saame veel kaks analoogilist pidevusvõrrandit.

Neist aga ei piisa. Selleks, et saada veel kolm võrrandit, leiame võrrandeist (3.145)₄₋₆ osatuletised „puuduva koordinaadi” järgi, liidame (3.145)₄₋₅ ja lahutame saadud summast (3.145)₆. Seejärel võtame saadud tulemusest osatuletise X_1 järgi:

$$\begin{aligned}
2 \left(\tilde{E}_{12,3} + \tilde{E}_{13,2} - \tilde{E}_{23,1} \right)_{,1} &= \\
&= [(U_{1,23} + U_{2,13}) + (U_{1,23} + U_{3,12}) - (U_{2,13} + U_{3,12})]_{,1} = \\
&= 2U_{1,123} = 2\tilde{E}_{11,23}.
\end{aligned} \tag{3.147}$$

Analoogiliselt saab tuletada veel kaks pidevusvõrrandit.

Kokku oleme saanud kuus pidevusvõrrandit, mis on tuntud ka *Saint-Venant'i pidevusvõrranditena*:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\tilde{E}_{11,22} + \tilde{E}_{22,11} = 2\tilde{E}_{12,12} \\
\tilde{E}_{22,33} + \tilde{E}_{33,22} = 2\tilde{E}_{23,23} \\
\tilde{E}_{11,33} + \tilde{E}_{33,11} = 2\tilde{E}_{13,13} \\
\left(\tilde{E}_{12,3} + \tilde{E}_{13,2} - \tilde{E}_{23,1} \right)_{,1} = \tilde{E}_{11,23} \\
\left(\tilde{E}_{12,3} + \tilde{E}_{23,1} - \tilde{E}_{13,2} \right)_{,2} = \tilde{E}_{22,13} \\
\left(\tilde{E}_{23,1} + \tilde{E}_{13,2} - \tilde{E}_{12,3} \right)_{,3} = \tilde{E}_{33,12}
\end{array} \right. \tag{3.148}$$

Saadud kuuel võrrandil on väga selge füüsikaline sisu.

1. Esimesed kolm: kui on antud normaaldeformatsioonid (suhtelised pikene-
mised) kolmes ristivas sihis, siis nende sihtidega määratud tasandites ei
saa nihkedeformatsiooni meelevaldselt ette anda, vaid nad on määratud
avaldistega $(3.148)_{1-3}$.
2. Viimased kolm: kui on antud nihkedeformatsioonid kolmes ristivas tasa-
pinnas, siis ei saa normaaldeformatsioone meelevaldselt ette anda, vaid nad
on määratud avaldistega $(3.148)_{4-6}$.

Mittelineaarsetele deformatsioonitensoritele, näiteks Lagrange'i DT, on pide-
vustingimusi leida sootuks keerukam.

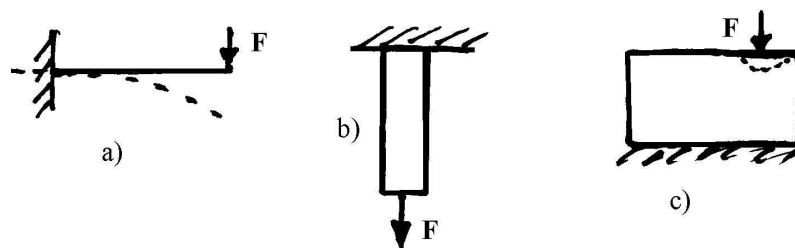
Märkus: Võrrelge saadud valemeid (3.148) elastsusteooria aluste kursuse 3.
peatükis tuletatud pidevustingimustega (mida seal nimetati ka Saint-Venant'i
pidevusvõrranditeks).

3.12 Lihtsustatud deformatsiooniteooriad

Esitatud valemite kasutamine võib viia matemaatilistele raskustele. Klassikalises (lineaarses) elastsusteoorias ja vedelike voolamise teoorias (hüdromehaanikas) hüljatakse seetõttu mittelineaarsed liikmed, st. uuritakse vaid nn. väikeseid deformatsioone. Tihti saab lineaarse teooria täpsust tõsta lähtudes uuritava objekti geomeetriast ja deformatsiooni iseloomust.

Näited:

- Hästi õhukese tala paine — pöörded suured, pikenemised väikesed.
- Tala tõmme — pikenemised suured, pöörded väikesed. Rakendatakse Saint-Venant'i printsiipi (koormuse rakenduspunkti lähiümbruses on olukord muust tala erinev).
- Koondatud jõu mõju massiivile — siin on soovitatav rakendada puhtalt mittelineaarset teooriat.



Joonis 3.16: Erineva iseloomuga deformatsioonid: a) õhukese tala paine, b) tala tõmme ja c) koondatud jõu mõju massiivile.

Deformatsioonitensor, pöördetensor ja invariantid on avaldatavad läbi siirdegradientide (näiteks $U_{K,L}$). Seega saame rääkida väikestest siiretest või mõnest teisest kolmest sõltumatust muutujast, mis neid asendaks. Näiteks võivad olla aproksimatsioonide puhul kasutusel kolm peapikenemist või pöördevektori komponendid. Deformatsioonitensori või pöördetensori komponentide otsene kasutamine on komplitseeritud, sest sobivustingimused peavad olema rahuldatud. Samuti tuleb olla ettevaatlik kui suurusjärkude hindamise aluseks on siirdegradientid. Järgnevate näidete eesmärgiks on anda mingi baasettekujutus sellistest ligikaudsetest teooriatest.

3.12.1 Väikeste siirete teooria

Väikeste siirete teooria⁴¹ puhul loetakse väikesteks kõik siirdekomponeendid ja siirdegradiendid ning hüljatakse kõik mittelineaarsed liikmed. Deformatsiooni-tensorid (3.53) saavad nüüd kuju

$$\begin{cases} 2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL} \approx U_{K,L} + U_{L,K} = 2\tilde{E}_{KL}, \\ 2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl} \approx u_{k,l} + u_{l,k} = 2\tilde{e}_{kl} \end{cases} \quad (3.149)$$

ja pöördetensori jaoks kasutatakse valemeid (3.135) ja (3.136), st.

$$\tilde{R}_{KM} \approx R_{KM} - \delta_{KM} \quad \text{ja} \quad \tilde{R}_{KM} \approx \delta_{kK} \delta_{mM} \tilde{r}_{km}.$$

Siin kaob erinevus U_K ja u_k vahel ning saadakse klassikaline lõpmata väikeste deformatsioonide teooria.

⁴¹I.k. *small displacement theory*

Et saada paremaid (täpsemaid) tulemusi vaadeldakse siin tihti siiret nn. häirituste rea kujul —

$$\mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \mathbf{u}_n, \quad (3.150)$$

kus suurused \mathbf{u}_n hoitakse fikseeritud ning ϵ on häiritusparameeter. Sellise formalismi puhul vastab ϵ^n n -järku aproksimatsioonile. Teooria esitati E. ja F. Cosserat' poolt (1896).

3.12.2 Väikeste pöörete teooria

Väikeste pöörete⁴² puhul loeme iga joonelemendi pöörde väikeseks ja pöörde-
nurga $\vartheta \approx \sin \vartheta \approx \tan \vartheta$. Deformatsioonitensorit (3.65) (lk. 30) võib nüüd
aproksimeerida kujul

$$E_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} \left(\tilde{E}_{MK} \tilde{E}_{ML} + \tilde{E}_{MK} \tilde{R}_{ML} + \tilde{R}_{MK} \tilde{E}_{ML} \right). \quad (3.151)$$

Kui pööre on väike, siis võib kasutada pöördevektorit $2\tilde{R}_K = e_{KLM} \tilde{R}_{ML}$. Kui
nüüd mõni \tilde{R}_K komponent osutub teistega võrreldes väikeseks, siis lihtsustub
 E_{KL} avaldis veelgi, sest liikmed, mis osutuvad teistega võrreldes väikesteks,
hüljatakse. Selline aproksimatsioon sõltub keha ja deformatsiooni geomeetri-
ast. Näiteks, õhukese plaadi painde puhul on tasandilise elemendi pööre üm-
ber kesktasandi normaali sihilise telje väike, võrreldes pööretega, mis toimuvad
kesktasandil asuvate telgede ümber. Saadakse plaatide teist järku teooria, mis
on tuntud kui Föppl-Kármán-Timošenko teooria.

⁴²I.k. *small rotations*

3.12.3 Väikeste deformatsioonide ja väikeste pöörete teooria

Väikeste deformatsioonide (suhteliste pikenemiste) ja väikeste pöörete⁴³ puhul
loetakse nii $\tilde{E}_{KL} \ll 1$ kui ka $\tilde{R}_{KL} \ll 1$ ja

$$E_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} \left(\tilde{E}_{MK} \tilde{R}_{ML} + \tilde{R}_{MK} \tilde{E}_{ML} \right). \quad (3.152)$$

Kui pöörded ja deformatsioonid osutuvad sama suurusjärku olevateks, siis võib
nende korrutised hüljata. Tulemuseks on see, et eeldame väikeseid siirdegradien-
te ja saame lõpmata väikeste deformatsioonide teooria, st.,

$$E_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} \quad \text{ja} \quad R_{KL} \approx \delta_{KL} + \tilde{R}_{KL}. \quad (3.153)$$

Siin on seega hüljatud kõik mittelineaarsed liikmed. Kehtib superpositsiooni
printsip: *Mitimest siirdest põhjustatud deformatsiooni võib vaadelda neist siire-
test eraldi põhjustatud deformatsioonide summana* —

$$\begin{cases} \mathbf{E} \approx \tilde{\mathbf{E}} \approx \tilde{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_2 + \tilde{\mathbf{E}}_1 \\ \mathbf{R} \approx \tilde{\mathbf{R}} \approx \tilde{\mathbf{R}}_1 + \tilde{\mathbf{R}}_2 = \tilde{\mathbf{R}}_2 + \tilde{\mathbf{R}}_1 \end{cases} \quad (3.154)$$

⁴³I.k. *small extentions and small rotations*

3.13 Deformatsioonide erijuhud

Vaatleme kahte tüüpi deformatsioone

- (i) *Deformatsioonid, mille puhul pikenemistel või pööretel on piirangud.* Need deformatsioonid ei sõltu suunast ega keha või deformatsiooni geometriast. Siia klassi kuuluvad nn. jäik deformatsioon, puhas homogeenne pikenemine, potentsiaalne deformatsioon ja isohooriline deformatsioon.
- (ii) *Deformatsioonid, mille erisus on põhjustatud koordinaadistiku sobivast valikust.* Teisisõnu, pikenemised ja pöörded võivad mõnes koordinaadistikus olla väga spetsiifiliselt määratud. Siia klassi kuuluvad näiteks ühtlane paisumine, (lihtne) pikideformatsioon, lihtne nihe, tasapinnaline deformatsioon.

Märkus: Käesolevas alajaotuses on tensorid tihti tähistatud rasvases kirjas. Sel juhul $\mathbf{C} \leftrightarrow C_{KL}$, $\mathbf{c} \leftrightarrow c_{kl}$, $\mathbf{I} \leftrightarrow \delta_{KL}$, $\mathbf{R} \leftrightarrow R_{KL}$ jne.

(i) **Deformatsioonid, mille puhul pikenemistel või pööretel on piirangud.**

Jäik deformatsioon. Deformatsioon on jäik⁴⁴ (keha jääb jäigaks) kui mistahes kahe punkti vaheline kaugus ei muutu. Tarvilik ja piisav tingimus selleks on, et $\mathbf{C} = \mathbf{c} = \mathbf{I}$ igas punktis. Lisaks $C_\alpha = \lambda_\alpha^2 = 1$, $I_C = II_C = 3$ ja $III_C = 1$. Vaata ka lk. 55.

Puhas deformatsioon. Puhta deformatsiooni⁴⁵ ehk paisumise ehk pöördevaba deformatsiooni puhul peateljed ei pöördu. Tarvilik ja piisav tingimus selleks on, et $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ igas punktis. Vaata ka lk. 59

Potentsiaalne deformatsioon. Potentsiaalse deformatsiooni⁴⁶ puhul leidub skalaarne funktsioon V nii, et

$$\mathbf{U} = \text{grad } V. \quad (3.155)$$

Isohooriline deformatsioon. Isohooriline deformatsioon⁴⁷ on deformatsioon,

⁴⁴I.k. *rigid deformation*

⁴⁵I.k. *pure strain, dilatation*, eesti keeles ka puhas pikenemine ehk puhas pikideformatsioon

⁴⁶I.k. *potential deformation*

⁴⁷I.k. *isohoric deformation*

mille puhul ruumala ei muutu. Kuna (vt. ka lk. 57)⁴⁸

$$\frac{dv}{d\mathcal{V}} = \sqrt{\text{III}_C} = \frac{1}{\sqrt{\text{III}_c}} = j,$$

siis isohoorilise deformatsiooni puhul

$$\sqrt{\text{III}_C} = \sqrt{\text{III}_c} = j = 1. \quad (3.156)$$

Kuna antud juhul $\text{III}_C = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$, siis saab invariantid I_C ja II_C avaldada vaid kahe peapikenemise kaudu. Enamgi veel, funktsioonid mis üldjuhul sõltuvad kõigest kolmest invariantist (peapikenemisest), on nüüd vaid kahe esimese invarianti (peapikenemise) funktsioonid.

48

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_L} \right|, \quad C_{KL} = x_{k,K} x_{k,L}, \quad \text{III}_C = |C_{KL}| = |x_{k,K} x_{k,L}| = |x_{k,K}| \cdot |x_{k,L}|$$

(ii) Deformatsioonid, mille erisus on põhjustatud koordinaadistiku sobivast valikust

Siin on enamikel juhtudel tegu afinse teisendusega, mis seob materiaalse punkti \surd asukoha enne (X_K) ja pärast (x_k) deformatsiooni.

$$x_k = D_{kK} X_K, \quad X_K = \overset{-1}{D}_{Kk} x_k, \quad D_{kK} \overset{-1}{D}_{Kl} = \delta_{kl}, \quad (3.157)$$

kus D_{kK} ja $\overset{-1}{D}_{Kl}$ on konstantsed tensorid (maatriksid). Teisendus (3.157) jätab sirged sirgeteks, ellipsoidid ellipsiteks, ellipsoidid ellipsoidideks jne. Sellist deformatsiooni nimetatakse *homogeenseks deformatsiooniks*⁴⁹. Seda võib defineerida ka kujul

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial X_K \partial X_L} = 0. \quad (3.158)$$

Valemite (3.157)₁ ja (3.157)₂ põhjal on selge, et homogeense deformatsiooni korral deformatsioonigradiendid

$$x_{k,K} = D_{kK} \quad \text{ja} \quad X_{K,k} = \overset{-1}{D}_{Kk}. \quad (3.159)$$

⁴⁹I.k. *homogeneous strain*

Üldistatud homogeenne deformatsiooni puhul võib D_{kK} sõltuda materiaalse punkti koordinaatidest ja sel juhul viimased valemid ei kehti.

Erinevad tensorid (maatriksid) D_{kK} kirjeldavad erinevaid deformatsioone, millest mõningaid vaatleme allpool.

Ühtlane paisumine. Ühtlaseks paisumiseks⁵⁰ nimetatakse homogeenet deformatsiooni, mille puhul

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (3.160)$$

Deformatsioonitensorid

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{c}}^{-1} = \lambda^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{c} = \bar{\mathbf{C}}^{-1} = \lambda^{-2} \mathbf{I}, \quad 2\mathbf{E} = (\lambda^2 - 1)\mathbf{I}. \quad (3.161)$$

Deformatsiooniellipsoidid on antud juhul sfäärid. Järelikult iseloomustavad sellist deformatsiooni identsed peadeformatsioonid (peapikenemised). Parameeter λ iseloomustab pikkuse muutust suvalises suunas. Kui $\lambda > 1$, siis on tegu ühtlase

⁵⁰I.k. *uniform dilatation*

paisumisega (laienemisega), kui aga $0 < \lambda < 1$, siis ühtlase kokkutõmbumisega. Kera jääb sellisel deformatsioonil keraks. Deformatsioonitensorite invariandid

$$I_C = 3\lambda^2, \quad II_C = 3\lambda^4, \quad III_C = \lambda^6. \quad (3.162)$$

Üheteljeline (ühesuunaline) pikenemine ja pikideformatsioon.

Üheteljelise pikenemise⁵¹ puhul on

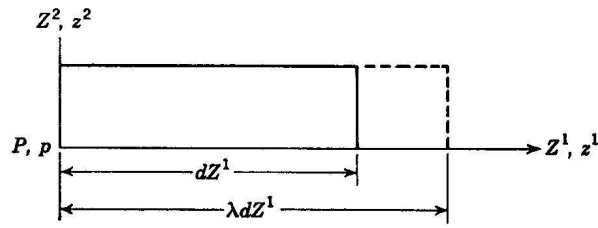
$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < \lambda < \infty \quad (3.163)$$

ning

$$[\mathbf{C}] = [\bar{\mathbf{c}}^{-1}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad [\mathbf{c}] = [\bar{\mathbf{C}}^{-1}] = \begin{bmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.164)$$

Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorid $2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I}$ ja $2\mathbf{e} = \mathbf{I} - \mathbf{c}$ ning

⁵¹I.k. *uniaxial strain*



Joonis 3.17: Ühesuunaline pikenemine. NB! Z^K asemel tuleb näha X_K ja z^k asemel x_k jne. :)

invariandid

$$\begin{cases} \text{I}_C = 2 + \lambda^2, & \text{II}_C = 1 + 2\lambda^2, & \text{III}_C = \lambda^2, \\ \text{I}_E = 0.5(\lambda^2 - 1), & \text{II}_E = \text{III}_E = 0. \end{cases} \quad (3.165)$$

Deformatsiooniellipsoid on antud juhul pöördellipsoid kusjuures kaks peapikenemist on võrdsed ühega, ning üks on ühest erinev. Deformatsiooni tulemusena liigub teljega X_1 risti olev tasand paralleelselt iseendaga ja X_2 ning X_3 sihis deformatsioon puudub.

Tegelikult tavapäraste materjalide korral tala ristlõige tõmbe puhul väheneb ja surve puhul suureneb. Sellist deformatsiooni nimetatakse *pikideformatsiooniks*

ehk *pikinemiseks*⁵². Nüüd

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & K\lambda & 0 \\ 0 & 0 & K\lambda \end{bmatrix}, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad (3.166)$$

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{c}^{-1}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & (K\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (K\lambda)^2 \end{bmatrix}, \quad (3.167)$$

$$[\mathbf{c}] = [\mathbf{C}^{-1}] = \begin{bmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & (K\lambda)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (K\lambda)^{-2} \end{bmatrix}. \quad (3.168)$$

Invariandid

$$\text{I}_C = (1 + 2K^2)\lambda^2, \quad \text{II}_C = (2 + K^2)K^2\lambda^4, \quad \text{III}_C = K^4\lambda^6, \quad (3.169)$$

Seega, antud juhul on X_1 sihis pikenemiskoeffitsent $ds_1/dS_1 = \lambda$ ja suhteline pikenemine $(ds_1 - dS_1)/dS_1 = \lambda - 1$. Vastavad suurused X_2 ja X_3 sihis on $K\lambda$

⁵²I.k. *simple extention*, eesti keeles on võimalikud veel mitmed terminid, näiteks puhas pikenemine jms.

ja $K\lambda - 1$. *Poisson'i tegur* ν , mis iseloomustab pikenemiste suhet põiki- (X_2 või Z_3 siht) ja pikisuunas (X_1 siht), on defineeritud järgmiselt:⁵³

$$\nu = -\frac{K\lambda - 1}{\lambda - 1} = \frac{1 - K\lambda}{\lambda - 1}, \quad K = \frac{1 + \nu}{\lambda} - \nu. \quad (3.170)$$

Kui $\nu > 0$ siis ristlõige väheneb, kui $\nu < 0$, siis suureneb, $\nu = -1$ ($K = 1$) korral on tegu ühtlase paisumisega, $\nu = 0$ ($K = 1/\lambda$) puhul üheteljelise pikenemisega.

Lihtne nihe. Lihtsa nihke⁵⁴ korral

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 1 & S & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad -\infty < S < \infty, \quad S = \text{const}. \quad (3.171)$$

Seega liikumisseadus saab kuju (joonis 3.18)

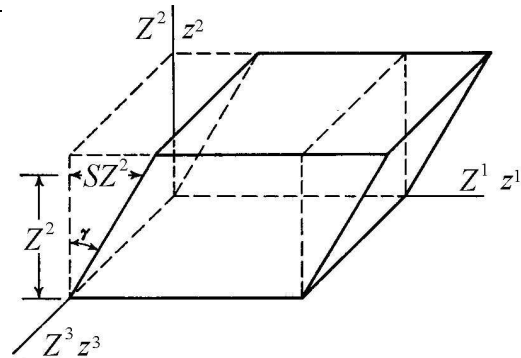
$$x_1 = X_1 + SX_2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3. \quad (3.172)$$

⁵³Tugevusõpetuses

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}.$$

⁵⁴I.k. *simple shear*. Eelmiste aastate konspektides olen siin ekslikult kasutanud terminit puhas nihe. Tegelikult vastab puhtale nihkele olukord, mida on kirjeldatud lk. 42 oleval joonisel 3.8.

Lihtsat nihet võib ühest küljest kirjeldada kui deformatsiooni, mis pöörab tasandeid $X_1 = \text{const.}$ ümber nende lõikejoone tasandiga $X_2 = 0$ nurga $\gamma = \arctan S$ võrra, vastavalt liikumisseadusele (3.172). Teisest küljest aga kui deformatsiooni, mis nihutab mittedeformeeruvaid tasandeid $X_2 = \text{const.}$ vastavalt liikumisseadusele (3.172).



Joonis 3.18: Lihtne nihe. NB! Z ja X ; z ja x !

Deformatsioonitensorid ja invariantid

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 & S & 0 \\ S & 1 + S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\bar{\mathbf{C}}] = \begin{bmatrix} 1 + S^2 & -S & 0 \\ -S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.173)$$

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1 & -S & 0 \\ -S & 1 + S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\bar{\mathbf{c}}] = \begin{bmatrix} 1 + S^2 & S & 0 \\ S & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.174)$$

$$[\mathbf{E}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{e}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & -S^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.175)$$

$$\begin{cases} \text{I}_C = \text{II}_C = 3 + S^2, & \text{III}_C = 1, \\ \text{I}_e = -\text{I}_E = 2\text{II}_e = 2\text{II}_E = -S^2/2, & \text{III}_e = \text{III}_E = 0. \end{cases} \quad (3.176)$$

Kuna $\text{III}_C = 1$, siis on lihtne nihe isohooriline deformatsioon.

Kui lahendada karakteristlik kuupvõrand

$$C^3 - \text{I}_C C^2 + \text{II}_C C - \text{III}_C = 0,$$

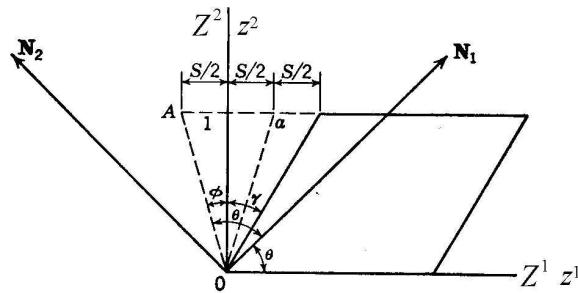
saame deformatsioonitensorite \mathbf{C} ja \mathbf{c} peaväärtused

$$\begin{cases} C_1 = 1/c_1 = \lambda_1^2 = 1 + S^2/2 + S\sqrt{1 + S^2/4}, \\ C_2 = 1/c_2 = \lambda_2^2 = 1 + S^2/2 - S\sqrt{1 + S^2/4}, \\ C_3 = 1/c_3 = \lambda_3^2 = 1. \end{cases} \quad (3.177)$$

Viimastele vastavad peavektorid

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\mathbf{I}_1 + (S/2 \pm \sqrt{1 + S^2/4}) \mathbf{I}_2}{\sqrt{2 + S^2/2 \pm S\sqrt{1 + S^2/4}}}, \quad \mathbf{N}_3 = \mathbf{I}_3, \quad (3.178)$$

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\mathbf{i}_1 + (-S/2 \pm \sqrt{1 + S^2/4}) \mathbf{i}_2}{\sqrt{2 + S^2/2 \mp S\sqrt{1 + S^2/4}}}, \quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{i}_3. \quad (3.179)$$



Joonis 3.19: Nihketasand NB! Z ja X ; z ja x !

Tasandi $X_3 = 0$ punkt $A(-S/2, 1, 0)$ läheb pärast deformatsiooni vastavalt valemile (3.172) asendisse $a(S/2, 1, 0)$ (vt. joonis 3.19). Seega $OA = Oa$ ja järelikult kiud, mis olid enne deformatsiooni paralleelsed OA -ga ja moodustasid X_2 teljega nurga $\Phi = \arctan S/2$ ei muuda deformatsiooni käigus oma pikkust. Valemist (3.178) saame määrata nurga ✓

$$\tan \vartheta = S/2 + \sqrt{1 + S^2/4}. \quad (3.180)$$

Ka OA ja \mathbf{N}_1 vaheline nurk on ϑ , sest $\tan(\widehat{OAN_1}) = \tan \vartheta$. Seega poolitab peasuund \mathbf{N}_1 nurga $\widehat{OAX_1}$, peasuund \mathbf{N}_2 on temaga risti tasandil $X_3 = 0$ ning \mathbf{N}_3 on suunatud piki telge X_3 .

Tasapinnaline deformatsioon. Erinevalt kolmest viimasest näitest, ei pruugi siin olla tegu homogeense deformatsiooniga. Tasapinnalise deformatsiooni⁵⁵ korral toimub paralleelsetel tasanditel identne deformatsioon ning nende normaali sihis deformatsioonid puuduvad. Seega, kui deformatsioonid toimuvad $x_1 - x_2$ tasandis, siis liikumisseadus on esitatav kujul

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(X_1, X_2), \quad k = 1, 2, \\ x_3 &= X_3. \end{aligned} \quad (3.181)$$

⁵⁵Lk. *plane strain*

On lihtne mõista, et Cauchy deformatsioonitensor saab nüüd kuju

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.182)$$

ja analoogsed, st., väliskuju poolest sarnased on ka kõik teised deformatsioonitensorid ning pöördetensorid. Üks peatelgedest on antud juhul paralleelne x_3 -ga ja tema sihis on pikenemiskoeffitsient $\lambda_3 = 1$. Tasapinnaline deformatsioon on isohooriline kui $\lambda_1 = 1/\lambda_2$. •

Üldistatud tasapinnaline deformatsioon on defineeritud kujul

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(X_1, X_2), \quad k = 1, 2, \\ x_3 &= x_3(X_3). \end{aligned} \quad (3.183)$$

3.14 Kiirus ja kiirendus

3.14.1 Materiaalne tuletis

Pideva keskkonna mehaanikas on dünaamiliste protsesside kirjeldamise puhul vaja leida materiaalse punktidega seotud füüsikaliste suuruste (skalaaride, vektorite ja tensorite) muutumise kiirust⁵⁶, st., tuleb leida tuletisi aja järgi skalaaridest, vektoritest ja tensoritest (mis on funktsioonid kas materiaalsest või ruumilistest koordinaatidest) mingis fikseeritud materiaalses punktis. Siinjuures tuleb arvesse võtta nii muutus, mis on seotud fikseeritud ruumipunktiga (lokaalne muutus), kui materiaalse punkti liikumisest põhjustatud muutus (konvektiivne muutus).

Materiaalne tuletis vektorist. *Materiaalseks tuletiseks vektorist (aja järgi)* nimetatakse operatsiooni

$$\dot{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|_{\mathbf{x}=\text{const}}. \quad (3.184)$$

⁵⁶Lk. *time rate*

Kui vektorfunktsiooni \mathbf{f} argumentideks on LK, s.t.

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = F_K(\mathbf{X}, t)\mathbf{I}_K, \quad (3.185)$$

siis langevad materiaalne tuletis ja osatuletis aja järgi kokku:

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial F_K}{\partial t} \mathbf{I}_K. \quad (3.186)$$

Näide: Nii leitakse materiaalsel tuletisel liikumisseadusest $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. ✓

Keerukam on lugu siis, kui \mathbf{f} on avaldatud EK-s. Vaatleme vektorfunktsiooni

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f_k(\mathbf{x}, t)\mathbf{i}_k. \quad (3.187)$$

Nüüd (kuna \mathbf{i}_k on konstantsed)

$$\dot{\mathbf{f}} = \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \mathbf{i}_k, \quad (3.188)$$

sest \mathbf{x} on läbi liikumisseaduse LK \mathbf{X} funktsioon.

Sageli esitatakse materiaalne tuletis vektorist kujul

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{f}_k \mathbf{i}_k \equiv \frac{Df_k}{Dt} \mathbf{i}_k, \quad (3.189)$$

kus suurust

$$\frac{Df_k}{Dt} = \frac{\partial f_k}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}}_{f_{k,i}} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t}}_{\dot{x}_i} = \frac{\partial f_k}{\partial t} + f_{k,i} \dot{x}_i \quad (3.190)$$

nimetatakse materiaalseks tuletiseks vektori \mathbf{f} komponendist f_k . Esimest liiget valemities (3.188) ja (3.190) nimetatakse *lokaalseks tuletiseks* (mõnikord ka *tuletiseks aja järgi*), teist liiget aga *konvektiivseks tuletiseks*. Lokaalne tuletis iseloomustab muutusi, mis toimuvad vaadeldavas ruumipunktis ning konvektiivne tuletis muutusi, mis on põhjustatud materiaalse punkti liikumisest (vaadeldava ruumipunkti ümbruses).

Materiaalne tuletis skalaarist. Kui skalaarse funktsiooni f argumentiks on LK, siis on materiaalse tuletise leidmise eeskiri analoogiline valemiga (3.186):

$$\dot{f}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (3.191)$$

Näiteks, kui skalaarseks funktsiooniks on temperatuur $\theta = \theta(\mathbf{X}, t)$, siis $\dot{\theta} = \partial\theta(\mathbf{X}, t)/\partial t$

Kui aga skalaarfunktsiooni argumentideks on EK, s.t. $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t)$, siis on materiaalne tuletis on defineeritud analoogiliselt valemiga (3.190):

$$\dot{\Phi} = \frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial x_l}}_{\Phi_{,l}} \dot{x}_l = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Phi_{,l} \dot{x}_l. \quad (3.192)$$

Näide: Tähistagu skalaar $\Phi \equiv \theta$ materiaalse punkti temperatuuri. Temperatuuri muutumisel võib olla kaks põhjust: 1) antud ruumipunkti temperatuur muutub ja 2) liikudes satub materiaalne punkt teise ruumipunkti, kus on erinev temperatuur (võrreldes ruumipunktiga, kus ta oli). Viimast nähtust nimetatakse füüsikas konvektsiooniks.

Materiaalne tuletis tensoritest. *Materiaalne tuletis tensorite komponentidest* on defineeritud järgmiselt —

$$\frac{Df_{kl}}{Dt} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial t} + f_{kl,m}\dot{x}_m. \quad (3.193)$$

Märkused:

- (i) Materiaalse tuletise kontseptsiooni töid sisse Euler (1770) ja Lagrange (1783), tähistus D/Dt pärineb aga Stokesilt (1845).
- (ii) Kui on tegu liikumisseadusega $x_k = x_k(\mathbf{X}, t)$, siis

$$\dot{x}_k = \frac{Dx_k}{Dt} = \frac{\partial x_k}{\partial t}. \quad (3.194)$$

3.14.2 Materiaalse punkti kiirus ja kiirendus

Kiirus

Kiirus on teatavasti kohavektori esimene tuletis aja järgi. Kui materiaalse punkti kohavektor on $\mathbf{p} \equiv \mathbf{x} = x_k(\mathbf{X}, t)\mathbf{i}_k$, siis tema kiirus on defineeritud kujul

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (3.195)$$

Kuna baasivektorid \mathbf{i}_k ei sõltu ajast, siis

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{x}_k(\mathbf{X}, t)\mathbf{i}_k. \quad (3.196)$$

Kui tähistada $\mathbf{v} = v_k\mathbf{i}_k$, siis

$$v_k \equiv \dot{x}_k \equiv \frac{\partial x_k}{\partial t} \equiv \frac{Dx_k}{Dt}. \quad (3.197)$$

Kuna kohavektor

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{u} \quad (3.198)$$

ja \mathbf{P} ei sõltu ajast (sageli tähistab $\mathbf{P} \equiv \mathbf{X}$ punkti kohavektorit alghetkel), siis

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{u}}. \quad (3.199)$$

Lagrange'i koordinaadid. Olgu siirdevektor esitatud läbi LK kujul $\mathbf{u} = U_K \mathbf{I}_K$, kus $U_K = U_K(\mathbf{X}, t)$. Nüüd

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial U_K}{\partial t} \mathbf{I}_K, \quad \text{ehk} \quad \mathbf{v} = V_K \mathbf{I}_K, \quad \text{kus} \quad V_K = \frac{\partial U_K}{\partial t}. \quad (3.200)$$

Viimased avaldised esitavadki *kiiruse (kiirusvektori) Lagrange'i koordinaatides*.

Euleri koordinaadid. Kui siirdevektor on esitatud läbi Euleri koordinaatide, siis $\mathbf{u} = u_k \mathbf{i}_k$, kus $u_k = u_k(\mathbf{x}, t)$. Nüüd saame *kiiruse avaldised Euleri koordinaatides*:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{Du_k}{Dt} \mathbf{i}_k \equiv \left[\frac{\partial u_k}{\partial t} + u_{k,l} \underbrace{v_l}_{\dot{x}_l} \right] \mathbf{i}_k, \quad (3.201)$$

ehk

$$\mathbf{v} = v_k \mathbf{i}_k, \quad \text{kus} \quad v_k = \frac{Du_k}{Dt} \equiv \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_{k,l} \underbrace{v_l}_{\dot{x}_l}.$$

Seega, ülaltoodud lähenemist kasutades saame kiiruse- ja siirdekomponentide vahelised seosed Euleri koordinaatide puhul ilmutamata kujul.

Teiselt poolt, kui on teada materiaalse punkti kiirus LKs, siis kasutades liikumisseadust $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, saame

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (3.202)$$

Kiirendus

Materiaalse punkti kiirendus on defineeritud kui tema kiirusvektori esimene tuletis aja järgi —

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.203)$$

Lagrange'i koordinaatide puhul

$$\mathbf{a} = A_K \mathbf{I}_K, \quad A_K = \frac{\partial V_K}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_K}{\partial t^2} \quad (3.204)$$

ning *Euleri koordinaatide* puhul

$$\mathbf{a} = a_k \mathbf{i}_k, \quad a_k = \frac{Dv_k}{Dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l} \underbrace{v_l}_{\dot{x}_l} \quad (3.205)$$

Seega avalduvad kiirenduse komponendid nii LK-s kui EK-s ilmutatud kujul.

Märkused

- (i) $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ määrab *kiiruse välja* ($\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ omakorda *kiirenduse välja*).
- (a) Punkti, kus $\mathbf{v} = 0$, nimetatakse *stagneerunud punktiks*⁵⁷.
- (b) Kui kiirus ei sõltu ajast, st., $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, siis nimetatakse sellist liikumist *statsionaarseks liikumiseks*⁵⁸. See määratlus kehtib suvalise vektorvälja jaoks.
- (c) Liikumist, mille puhul vaid üks kiirusvektori komponent erineb nullist ja sõltub seejuures vaid vastavast ruumikoordinaadist nimetatakse *ühemõõtmeliseks liikumiseks*⁵⁹ — näiteks $v_1 = v_1(x_1, t)$ ja $v_2 = v_3 = 0$.
- (d) Liikumist, mille puhul üks kiirusvektori komponent on null ja kaks kiirusvektori komponenti on nullist erinevad ning sõltuvad seejuures vastavatest ruumikoordinaatidest, nimetatakse *tasapinnaliseks liikumiseks*⁶⁰ — näiteks $v_1 = v_1(x_1, x_2, t)$, $v_2 = v_2(x_1, x_2, t)$, $v_3 = 0$.

⁵⁷I.k. *stagnation point*, ld. *stagnum* – seisev vesi

⁵⁸I.k. *steady motion*

⁵⁹I.k. *lineal motion*

⁶⁰I.k. *plane motion*

- (ii) Lagrange'i kirjelduse puhul on (analoogselt punkti kinemaatikaga) antud kiirusega liikuv materiaalne punkt identifitseeritav. Euleri kirjelduse puhul selline analoogia punkti kinemaatikaga puudub. Siin on antud kiiruste välja puhul, hetkel t , teada kiirusvektor igas ruumipunktis, kuid pole teada, milline materiaalne punkt asub vaadeldavas ruumipunktis.

Näide: Temperatuuri muutumise kiirus.

Keskkonna liikumisseadus on antud kujul

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + AtX_2, \\ x_2 = -AtX_1 + X_2, \\ x_3 = X_3, \end{cases} \quad (3.206)$$

kus A on konstant. Temperatuur ruumis muutub vastavalt seosele

$$\theta(\mathbf{x}, t) = x_1 + tx_2. \quad (3.207)$$

Leida temperatuuri muutumise kiirus nii EK-s kui LK-s.

Lahendus . . .

3.14.3 Trajektoor ja iseloomulikud jooned ning pinnad

*Trajektoor*⁶¹ on kõver, mida mööda liigub vaadeldav materiaalne punkt — ✓

$$x_k = x_k(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{x}=\text{const}}. \quad (3.208)$$

Teisisõnu, trajektoor on joon, mille liikuv materjaalne punkt „joonistab” ruumi. Kui on antud kiiruste väli, siis fikseeritud materiaalse punkti \mathbf{X}_0 trajektoorigi on süsteemi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \quad (3.209)$$

integraalkõver, mis vastab algtingimusele $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}_0, t_0)$.

*Voolujooned*⁶² on jooned (kõverad), mille puutujad igas punktis ühtivad sihilt kiirusvälja vektoritega. Kui tähistada materiaalse punkti kohavektori \mathbf{p} lõpmata väikest muutust, mis on paralleelne voolujoone puutujaga $d\mathbf{p}$, siis

$$\mathbf{v} = k d\mathbf{p} \quad \text{ehk} \quad \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} = \frac{1}{k}, \quad (3.210)$$

kus k on konstant. Seega on voolujooned süsteemi (3.210) integraalkõverad.

⁶¹I.k. *pathline, trajectory*

⁶²I.k. *streamlines*

Voolujooned näitavad, mis suunas erinevates ruumipunktides asuvad materjaalsed punktid antud hetkel liiguvad.

Näited trajektoore ja voolujoonte kohta — pika ja lühikese säriaajaga fotod veepinnal olevast õietolmust või öisest liiklusest. †

Millisel juhul langevad voolujooned ja trajektoorigid kokku? ‡

...

*Voolupinnad*⁶³ ja *voolutorud*⁶⁴ on voolujoonte hulgid, mis lõikuvad vastavalt avatud või suletud kõveraga. *

*Emissioonijooned*⁶⁵ on jooned mille moodustavad ajavahemikus $t_0 \leq t \leq t_1$ fikseeritud ruumipunkti \mathbf{x}_0 läbinud materiaalsed punktid.

*Ajajoonteks*⁶⁶ nimetatakse ajavahemikus $t_0 \leq t \leq t_1$ fikseeritud ruumipunkti \mathbf{x}_0 läbinud materjaalsete punktide trajektoorigid hulka.

Näide. Animatsioon trajektoore, voolujoonte, emissioonijoonte ja ajajoonte moodustumise kohta. ✓

⁶³I.k. *streamsheets*

⁶⁴I.k. *stream tubes*

⁶⁵I. k. *streaklines*

⁶⁶I. k. *timelines*

Vedeliku kiiruste väli on antud kujul

$$v_1 = \dot{x}_1 = v, \quad v_2 = \dot{x}_2 = vx_1t. \quad (3.211)$$

Animeerida emissioonijoone ja ajajoonte teke materiaalsele punktidele, mis lähtuvad ruumpunktist $(0,0)$ ning kiiruste välja ja voolujoonte muutumine ajavahemikus $0 \leq t \leq 1$ võttes $v = 3$.

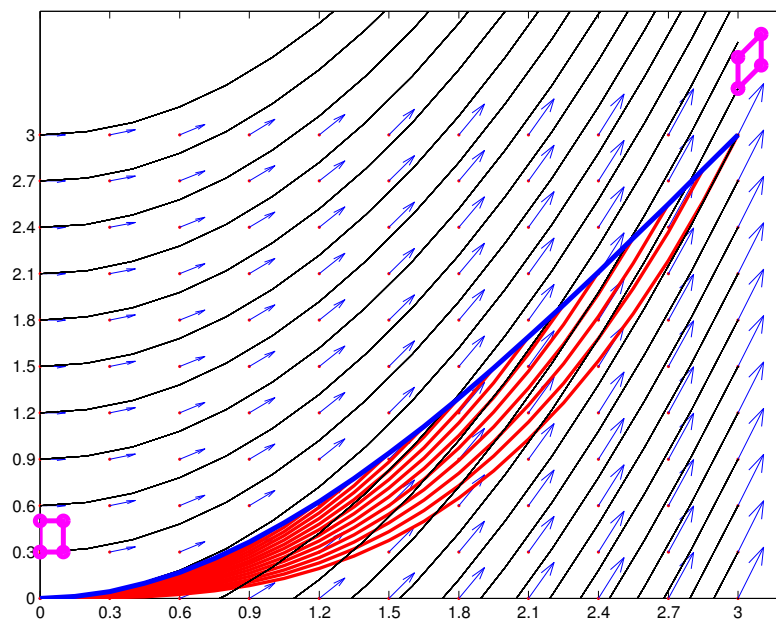
Lahendus: Voolujooned leitakse võrrandist

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = k \Rightarrow v_2 dx_1 = v_1 dx_2 \Rightarrow \dots \dots \dots x_2 = x_{02} + 0,5t [(x_1)^2 - (x_{01})^2]. \quad (3.212)$$

Valemeist (3.211) saame avaldised ajajoonte

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + v(t - t_0), \\ \dot{x}_2 = vt [x_{01} + v(t - t_0)] = \dots \\ x_2 = \dots \end{cases} \quad (3.213)$$

Punktist $(0,0)$ väljuvate ajajoonte lõpp-punktid moodustavad punktist $(0,0)$ väljuva emissioonijoone.



Joonis 3.20: Voolujooned, kiiruste väli, emissioonijooned ja ajajooned

Vt. lisaks näiteid failist „Emissioonijooned.doc”

3.14.4 Materiaalne tuletis deformatsioonigradiendist ja kohavektori diferentsiaalid

Esiteks leiame materiaalse tuletise deformatsioonigradiendist $x_{k,K}$.

$$\frac{D}{Dt}(x_{k,K}) = \frac{\partial}{\partial X_K} \underbrace{\frac{Dx_k}{Dt}}_{v_k} = \dots\dots\dots =$$

Kokku oleme saanud

$$\frac{D}{Dt}(x_{k,K}) = v_{k,l}x_{l,K} \quad (3.214)$$

Teiseks leiame materiaalse tuletise kohavektori diferentsiaalid dx_k :

$$\frac{D}{Dt}(dx_k) = d(\dot{x}_k) = d(v_k) = v_{k,l}dx_l. \quad (3.215)$$

Järgnevalt näitame, et

$$\frac{D}{Dt}(X_{K,k}) = -v_{l,k}X_{K,l}. \quad (3.216)$$

Selleks leiame materiaalse tuletise võrdusest $x_{l,L}X_{L,k} = \delta_{kl}$

$$\frac{D}{Dt}(x_{l,L}X_{L,k}) = \frac{D}{Dt}\delta_{kl} \dots$$

Kust avaldame

$$x_{l,L} \frac{D}{Dt}X_{L,k} = \dots$$

Korrutades VP ja PP $X_{K,l}$ oleme tõestanud valemi (3.216).

...

3.14.5 Suuruse ds^2 materiaalne tuletis

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} = \frac{D(dx_k dx_k)}{Dt} = 2 \frac{D(dx_k)}{Dt} dx_k = \dots$$

Tähistades

$$d_{kl} = v_{(k,l)} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}), \quad (3.217)$$

saame

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} = 2d_{kl} dx_k dx_l, \quad (3.218)$$

kus suurust d_{kl} nimetatakse *Euleri deformatsioonikiiruse tensoriks*.

LK korral

$$\frac{D(ds^2)}{Dt} = 2d_{kl} x_{k,K} x_{l,L} dX_K dX_L = 2\dot{E}_{KL} dX_K dX_L. \quad (3.219)$$

Suurust

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = \frac{1}{2} \dot{C}_{KL} \quad (3.220)$$

nimetatakse *Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensoriks*.

3.14.6 Materiaalne tuletis jakobiaanist j

Näitame, et

$$\frac{Dj}{Dt} = jv_{k,k} \quad (3.221)$$

$$\frac{Dj}{Dt} = \dots$$

3.14.7 Elementaaruumala muutumise kiirus

Lähtume sellest, et $dv = jd\mathcal{V}$ (vt. lk. 57) ja saame

$$\frac{D(dv)}{Dt} = \frac{D}{Dt} (jd\mathcal{V}) = \frac{D}{Dt} (j) d\mathcal{V} = jv_{k,k} d\mathcal{V} = v_{k,k} dv = I_d dv. \quad (3.222)$$

Siin $I_d = d_{kk} = v_{k,k}$ on deformatsioonikiiruse tensori esimene invariant ja samas kiiruse divergents.

3.14.8 Elementaarpinna muutumise kiirus

Lõpmata väikesed vektorid $d\mathbf{X}^{(1)} = dX_L^{(1)}\mathbf{I}_L$ ja $d\mathbf{X}^{(2)} = dX_M^{(2)}\mathbf{I}_M$ LK-s (või $d\mathbf{x}^{(1)} = dx_l^{(1)}\mathbf{i}_l$ ja $d\mathbf{x}^{(2)} = dx_m^{(2)}\mathbf{i}_m$ EK-s) määravad läbi vektorkorrutise elementaarpinna

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{X}^{(1)} \times d\mathbf{X}^{(2)} \quad \text{ja} \quad d\mathbf{a} = d\mathbf{x}^{(1)} \times d\mathbf{x}^{(2)}, \quad (3.223)$$

mida saab omakorda avaldada kujul

$$d\mathbf{A} = dA_K\mathbf{I}_K \quad \text{ja} \quad d\mathbf{a} = da_k\mathbf{i}_k. \quad (3.224)$$

Näitame, et elementaarpinna vektori komponendi da_k muutumise kiirus avaldub kujul:

$$\frac{D}{Dt}(da_k) = v_{m,m}da_k - v_{m,k}da_m. \quad (3.225)$$

Tõestus: ...

$$d\mathbf{A} = dX_K^{(1)}\mathbf{I}_K \times dX_L^{(2)}\mathbf{I}_L = \dots = e_{KLM}dX_K^{(1)}dX_L^{(2)}\mathbf{I}_M \quad (3.226)$$

ja

$$d\mathbf{a} = dx_k^{(1)}\mathbf{i}_k \times dx_l^{(2)}\mathbf{i}_l = \dots = e_{klm}dx_k^{(1)}dx_l^{(2)}\mathbf{i}_m \quad (3.227)$$

Viimastest

$$dA_M = e_{KLM}dX_K^{(1)}dX_L^{(2)} \quad \text{ja} \quad da_m = e_{klm}dx_k^{(1)}dx_l^{(2)} \quad (3.228)$$

Toome sisse *bivektorid* —

$$dA_{LM} = e_{KLM}dA_K \quad \text{ja} \quad da_{lm} = e_{klm}da_k \quad (3.229)$$

mille „pöördteisendus” on

$$dA_K = \frac{1}{2}e_{KLM}dA_{LM} \quad \text{ja} \quad da_k = \frac{1}{2}e_{klm}da_{lm} \quad (3.230)$$

(3.228) ja (3.230) põhjal

$$dA_{LM} = 2dX_L^{(1)}dX_M^{(2)} \quad \text{ja} \quad da_{lm} = 2dx_l^{(1)}dx_m^{(2)} \quad (3.231)$$

Kuna $dx_l^{(1)} = x_{l,L}dX_L^{(1)}$ ja $dx_m^{(2)} = x_{m,M}dX_M^{(2)}$, siis

$$da_{lm} = \dots \quad \dots = x_{l,L}x_{m,M}dA_{LM} \quad (3.232)$$

(3.230) põhjal

$$da_k = \frac{1}{2}e_{klm}da_{lm} \stackrel{(3.232)}{=} \dots \quad \dots \stackrel{(3.229)}{=} \frac{1}{2}e_{klm}e_{KLM}x_{l,L}x_{m,M}dA_K \quad (3.233)$$

Kuna saab näidata, et $e_{klm}e_{KLM}x_{l,L}x_{m,M} = 2jX_{K,k}$, siis

$$da_k = jX_{K,k}dA_K. \quad (3.234)$$

$$\frac{D(da_k)}{Dt} \stackrel{(3.234)}{=} \dots \quad (3.235)$$

= ...

$$= v_{m,m}da_k - v_{m,k}da_m$$

3.15 Joon-, pind- ja ruumintegraalide kinemaatika

Integraalsete füüsikaliste suuruste muutumise kiiruse määramiseks on vaja leida tuletisi aja järgi vastavatest integraalidest. Algul toome sisse aga materiaalse joone, materiaalse pinna ja materiaalse mahu mõisted⁶⁷.

Materiaalne joon on joon, mis koosneb materiaalistest punktidest:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(S), S - \text{parameeter.} \quad (3.236)$$

Materiaalse joone asukoht ruumis hetkel t on määratud läbi liikumisseaduse $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ kujul

$$\mathbf{x}(S, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}(S), t). \quad (3.237)$$

Materiaalne pind on pind, mis koosneb materiaalistest punktidest

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(R, Q), R, Q - \text{parameetrid} \quad (3.238)$$

ning tema asukoht ruumis hetkel t on

$$\mathbf{x}(R, Q, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}(R, Q), t). \quad (3.239)$$

Materiaalne maht on materiaalistest punktide 3D piirkond.

⁶⁷I.k. *material line, material surface, material volume*

Joonintegraal

Olgu ϕ mingi skalaarne funktsioon (näit. massi tihedus või kiirus või elektrijuhivus vms.), mis on defineeritud üle materiaalse joone L . Vastava joonintegraali muutumise kiirus leitakse materiaalse tuletise abil:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_L \phi dx_k &= \int_L \frac{D}{Dt} (\phi dx_k) = \int_L \left[\frac{D\phi}{Dt} dx_k + \phi \frac{D}{Dt} (dx_k) \right] = \\ &\stackrel{(3.215)}{=} \int_L [\dot{\phi} dx_k + \phi v_{k,l} dx_l]. \end{aligned} \quad (3.240)$$

Fikseeritud ruumijoone l puhul (ϕ on defineeritud mingil ruumijoonel l) ei vaatleme (fikseeritud) liikuvaid materiaalseid punkte ning joonintegraali muutumise kiirus

$$\frac{d}{dt} \int_l \phi dx_k = \frac{\partial}{\partial t} \int_l \phi dx_k = \int_l \frac{\partial \phi}{\partial t} dx_k, \quad (3.241)$$

sest dx_k ei sõltu ajast.

Pindintegraal

Olgu nüüd skalaarne funktsioon ϕ defineeritud üle materiaalse pinna S . Vastava pindintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_S \phi da_k &= \int_S \frac{D}{Dt} (\phi da_k) = \int_S \left[\frac{D\phi}{Dt} da_k + \phi \frac{D}{Dt} (da_k) \right] = \\ &\stackrel{(3.225)}{=} \int_S [\dot{\phi} da_k + \phi (v_{l,l} da_k - v_{l,k} da_l)]. \end{aligned} \quad (3.242)$$

Fikseeritud ruumipinna s puhul, ei vaatleme jällegi (fikseeritud) liikuvaid materiaalseid punkte ning pindintegraali muutumise kiirus

$$\frac{d}{dt} \int_s \phi da_k = \frac{\partial}{\partial t} \int_s \phi da_k = \int_s \frac{\partial \phi}{\partial t} da_k, \quad (3.243)$$

sest da_k ei sõltu ajast.

Ruumintegraal

Kui skalaarne funktsioon ϕ on defineeritud üle materiaalse mahu \mathcal{V} , siis ruumintegraali muutumise kiirus

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv &= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{D\phi}{Dt} dv + \phi \frac{D}{Dt}(dv) \right] \stackrel{(3.222)}{=} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi_{,k} v_k \right) dv + \phi v_{k,k} (dv) \right] = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\phi v_k)_{,k} \right] dv. \end{aligned} \quad (3.244)$$

Kui kasutada Greeni-Gaussi teoreemi⁶⁸, siis saame viimasest

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \phi dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_s \phi v_k da_k. \quad (3.245)$$

Siin on materiaalne maht \mathcal{V} asendatud fikseeritud ruumimahuga v , mida ümbritseb pind s ja mis hetkeliselt ühtib materiaalse mahuga \mathcal{V} . Seega, mingi füüsilise suuruse ϕ materiaalses mahus \mathcal{V} muutumise kiirus võrdub selle suuruse ϕ muutumise kiirus ruumilises mahus v (mis hetkeliselt ühtib materiaalse mahuga \mathcal{V}) pluss suuruse ϕv_k voog läbi ruumilist mahtu v ümbritseva pinna s .

⁶⁸ $\int_{\mathcal{V}} u_{k,k} dv = \int_S u_k da_k$, $da_k = n_k da$ — tuntud ka kui Gaussi-Ostrogradski teoreem või divergentsi teoreem

3.16 Keeriselisus ja deformatsiooni kiirus

3.16.1 Keeriselisus

Euleri *deformatsioonikiiruse tensor* on defineeritud juba punktis 3.14.5 kujul

$$d_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}) \equiv v_{(k,l)}, \quad (3.246)$$

Defineerime nüüd lisaks (*Cauchy*) *keeriselisuse tensori*⁶⁹

$$w_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} - v_{l,k}) \equiv v_{[k,l]}. \quad (3.247)$$

Viimases kahes avaldises tähistavad $v_{(k,l)}$ ja $v_{[k,l]}$ vastavalt kiiruse gradiendi (mis on oma olemuselt tensor) sümmeetrilist ja antisümmeetrilist (ehk kaldsümmeetrilist) osa.

Viimase kahe valemi põhjal

$$v_{k,l} = d_{kl} + w_{kl} \equiv v_{(k,l)} + v_{[k,l]}. \quad (3.248)$$

⁶⁹I.k. *vorticity tensor*. Kasutatakse ka terminit pöörlemistensor, i.k. vastavalt *spin tensor*.

Samasugune tähistus leiab kasutamist ka edaspidi. Näiteks võime kirjutada tensori b_{kl} jaoks $b_{kl} = b_{(kl)} + b_{[kl]}$.

Kaldsümmeetrilisest tensorist w_{kl} saab omakorda konstrueerida *keerisvektori*

$$w_k = e_{klm}w_{ml} = e_{klm}v_{m,l} \quad \text{ehk} \quad \mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v}, \quad (3.249)$$

kus

$$\text{curl } \mathbf{v} \equiv \text{rot } \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{v} \quad \text{ja} \quad \nabla \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (3.250)$$

3.16.2 Deformatsioonikiiruse tensori füüsikaline sisu

Deformatsioonikiiruse tensor d_{kl} iseloomustab materiaalsete joonelementide pikuse ja nende vahelise nurga muutumise (hetkelist) kiirust. Selle tõestuseks leiame *ühikvektori \mathbf{n} sihilise elemendi pikenemise kiiruse*⁷⁰ $d_{(\mathbf{n})}$. Valemi (3.218) põhjal $D(ds^2)/Dt = 2d_{kl}dx_kdx_l$. †

Seega —

$$d_{(\mathbf{n})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{ds} \frac{D(ds)}{Dt} = d_{kl}n_kn_l, \quad \text{kus} \quad n_k \equiv \frac{dx_k}{ds}. \quad (3.251)$$

⁷⁰I.k. *Stretching, relative rate of stretch, rate of extension*

Kui ortogonaalse koordinaadistiku, näiteks DRK, puhul on \mathbf{n} on võetud piki x_1 , siis

$$d_{(1)} = d_{11}. \quad (3.252)$$

Analoogiliselt saab näidata, et *algse täisnurga muutumise kiirus* avaldub kujul

$$-\dot{\vartheta}_{(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)} = 2d_{kl}n_{k1}n_{l2} \quad (3.253)$$

ning et kui ortogonaalsete koordinaatide puhul on \mathbf{n}_1 ja \mathbf{n}_2 valitud piki koordinaate x_1 ja x_2 , siis

$$-\dot{\vartheta}_{(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)} \equiv -\dot{\vartheta}_{(12)} = 2d_{12}, \quad (3.254)$$

Eelnenu võib kokku võtta **teoreemina**: *ortogonaalse koordinaadistiku puhul võrduvad deformatsioonikiiruse tensori normaalkomponendid koordinaatide sihiliste joonelementide pikenemise kiirusega ja segakomponendid ($k \neq l$) poolega nihkekiirusest koordinaatidega x_k ja x_l määratud pinnal.*

3.16.3 Deformatsioonitensorite materiaalsed tuletised

Alajaotuses 3.14.5 defineerisime Euleri deformatsioonikiiruse tensori d_{kl} ja näitasime, et Lagrange'i deformatsioonikiiruse tensor avaldub kujul

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = \frac{1}{2}\dot{C}_{KL},$$

vt. valem (3.220). Viimase põhjal $\dot{C}_{KL} = 2\dot{E}_{KL}$.

Kuna definitsiooni põhjal $C_{KL} = x_{k,K}x_{k,L}$, siis

$$\begin{aligned} \dot{C}_{KL} &= \frac{Dx_{k,K}}{Dt}x_{k,L} + x_{k,K}\frac{Dx_{k,L}}{Dt} = \\ &\dots \\ &= \end{aligned} \tag{3.255}$$

ja

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = d_{kl}x_{k,K}x_{l,L}. \tag{3.256}$$

Leiame nüüd seose deformatsioonikiiruse tensori d_{kl} ja Euleri deformatsioonitensori materiaalse tuletise \dot{e}_{kl} vahel. Selleks leiame jällegi materiaalse tuletise deformatsiooni mõõdust $ds^2 - dS^2$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(ds^2) &= \frac{D}{Dt}(ds^2 - dS^2) \stackrel{(3.43)}{=} 2\frac{D}{Dt}(e_{kl}dx_kdx_l) = \dots \\ &\stackrel{(3.215)}{=} 2(\dot{e}_{kl} + e_{ml}v_{m,k} + e_{km}v_{m,l})dx_kdx_l. \end{aligned} \tag{3.257}$$

Kuna valemi (3.218) põhjal $D(ds^2)/Dt = 2d_{kl}dx_kdx_l$, siis

$$d_{kl} = \dot{e}_{kl} + e_{ml}v_{m,k} + e_{km}v_{m,l}. \tag{3.258}$$

Arvestades Euleri deformatsioonitensori definitsiooni ($2e_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl}$) saame

$$\dot{c}_{kl} = -2\dot{e}_{kl}. \tag{3.259}$$

Meenutame, et kuna $2E_{KL} = C_{KL} - \delta_{KL}$, siis $\dot{C}_{KL} = 2\dot{E}_{KL}$.

3.16.4 Kiirusvälja tsirkulatsioon

Kiirusvälja (kiirusvektori) \mathbf{v} tsirkulatsiooniks mööda suletud taanduvat (laguvat) kõverat⁷¹ c , nimetatakse joonintegraali *

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_c v_k dx_k. \quad (3.260)$$

Siin $d\mathbf{x} \equiv d\mathbf{p} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ on kõvera c diferentsiaalne puutuja suvalises punktis, st., $d\mathbf{x} \equiv d\mathbf{p}$ näitab ka liikumise suunda mööda kõverat c . ‡

Stokesi teoreemi põhjal $\oint_c \mathbf{b} \cdot d\mathbf{x} = \int_s (\text{curl } \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{a}$. Arvestades seda, et valemi (3.249) põhjal on just keerisvektor \mathbf{w} rotor kiiruse vektorist \mathbf{v} , siis saame

$$\Gamma = \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_s \mathbf{w} \cdot d\mathbf{a} = \quad \text{ehk} \quad \Gamma = \oint_c v_k dx_k = \int_s w_k da_k, \quad (3.261)$$

kus s on orienteeritud pind, mis on ümbritsetud orienteeritud kõveraga c . Kokkuvõttes, kiirusvektori tsirkulatsioon mööda kinnist (ja taanduvat) kõverat võrdub keerisvektori vooga läbi sellele kõverale toetuva “suvalise” pinna.

⁷¹I.k. *reducible curve*

3.16.5 Keeriselisuse füüsikaline sisu

Käesolevas alajaotuses näitame, milles väljendub keeriselisuse tensori ja keerisvektori füüsikaline sisu.

Keeriselisuse tensori füüsikaline sisu

Vaatleme materiaalselt joonelementi, mille siht on antud hetkel määratud vektoriga $d\mathbf{x}$ ja mis pöörleb ümber vektoriga $\boldsymbol{\mu}$ määratud telje. Olgu $\boldsymbol{\nu}$ mingi fikseeritud ühikvektor ja φ vektorite $d\mathbf{x}$ ja $\boldsymbol{\nu}$ vaheline nurk. Kui tähistada $\mathbf{n} = d\mathbf{x}/ds$, siis

$$\cos \varphi = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = n_k \mathbf{i}_k \cdot \nu_l \mathbf{i}_l = \delta_{kl} \nu_l \frac{dx_k}{ds} = \nu_k \frac{dx_k}{ds}. \quad (3.262)$$

Võtame viimase avaldise vasakust ja paremast poolest materiaalse tuletise —

$$- (\sin \varphi) \dot{\varphi} = \nu_k \frac{D}{Dt} \left(\frac{dx_k}{ds} \right) = \quad (3.263)$$

$$= v_{l,m} n_m \nu_l - d_{(\mathbf{n})} \cos \varphi.$$

Kui $\varphi = \pm\pi/2$, siis saame, et

$$\dot{\varphi} = \mp v_{l,m} n_m v_l. \quad (3.264)$$

DRK on ortogonaalne koordinaatsüsteem. Valime $\boldsymbol{\nu} \parallel x_2$ ning $\mathbf{n} \parallel x_1$ ja leiame millise nurkkiirusega pöörleb x_1 sihiline element x_2 sihilise elemendi suhtes (ümber x_3 -ga määratud telje), st.,

$$\dot{\varphi}_{(12)} = \dots = -v_{2,1} \quad (3.265)$$

Esimene indeks näitab siin milline telg pöörleb ja teine mille suhtes ta pöörleb. Analoogiliselt

$$\dot{\varphi}_{(21)} = \dots = v_{1,2} \quad (3.266)$$

Seega

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{(21)} + \dot{\varphi}_{(12)} &= v_{1,2} - v_{2,1} = 2w_{12} = -2w_{21} \\ \dot{\varphi}_{(21)} - \dot{\varphi}_{(12)} &= v_{1,2} + v_{2,1} = 2d_{12} = 2d_{21} \end{aligned} \quad (3.267)$$

Seega oleme näidanud, et *keeriselisuse tensori komponent w_{kl} võrdub poolega ortogonaalsete koordinaatide x_k ja x_l sihiliste joonelementide pöörlemise nurkkiiruste summast. Siinjuures toimub pöörlemine ümber telje, mis on risti mõlema vaadeldava joonelemendiga.* Samuti leidis veelkord kinnitust fakt, et deformatsioonikiiruse tensori segakomponendid võrduvad poolega nihkekiirusest koordinaatidega x_k ja x_l määratud pinnal.

Keerisvektori füüsikaline sisu

Vaatleme pinnal s punkti \mathbf{x} , kus pinnanormaliks on \mathbf{n} ja keerisvektoriks \mathbf{w} . Kui pinna s pindala on a , siis

$$\oint_c v_k dx_k = a w_{\mathbf{n}} + O(a^2) \quad (3.268)$$

kus $w_{\mathbf{n}}$ on keerisvektori \mathbf{w} projektsioon pinnanormalil \mathbf{n} (ehk keerisvektori normaalkomponent). Seega, kui kõver c läheneb punktile \mathbf{x} , siis

$$w_{\mathbf{n}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \oint_c v_k dx_k, \quad (3.269)$$

st., kiiruse tsirkulatsioon mööda kontuuri c , jagatud pindalaga a võrdub keerisvektori normaalkomponendiga vaadeldavas punktis (kui $a \rightarrow 0$).

3.16.6 Keerisevaba ja keeriseline liikumine

Keerisevaba liikumine

Liikumine on *keerisevaba* siis ja ainult siis kui keeriselisuse tensor $w_{kl} = 0$ (ja järelikult ka keerisvektor $\mathbf{w} = 0$) vaadeldava piirkonna igas punktis. Vedeliku puhul nimetatakse sellist liikumist *laminaarseks*⁷² voolamiseks, st., vedeliku voolamine toimub paralleelsete kihtidena. Sellisel juhul on kiiruste väli avaldatav läbi potentsiaali ϕ —

$$v_k = -\phi_{,k} \quad (3.270)$$

ja liikumist võib nimetada ka *potentsiaalseks*. Potentsiaalse liikumise puhul joonintegraal

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} v_k dx_k &= - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\phi = \phi(\mathbf{x}_1) - \phi(\mathbf{x}_2) \\ \Gamma = \oint_c v_k dx_k &= - \oint_c d\phi = 0. \end{aligned} \quad (3.271)$$

⁷²Lk. *lamellar or laminar*

Viimasele vastab **Kelvini teoreem**: *Liikumine on potentsiaalne siis ja ainult siis kui kiirusvektori tsirkulatsioon mööda igat taanduvat kõverat on null*. Pöördteoreemi tõestus jäeldub Stokesi teoreemist — $\Gamma = \oint_s \mathbf{w} \cdot d\mathbf{a} = 0$ põhjal on $\mathbf{w} = 0$ kõikjal vaadeldavas piirkonnas ja seega on liikumine keerisevaba.

Keeriseline liikumine

Vaatleme juhtu, kus keerisvektor \mathbf{w} on nullist erinev igas vaadeldava piirkonna punktis. Jooni, mille puutujateks on keerisvektorid nimetatakse *keerisjoonteks*. Keerisjooned on võrrandi

$$\frac{dx_1}{w_1} = \frac{dx_2}{w_2} = \frac{dx_3}{w_3} \quad (3.272)$$

integraalkõverad. *Keerispinnad* on keerisjoontest moodustatud pinnad ja *keeristorud* on “suletud keerispinnad,” st., nad on defineeritud analoogiliselt voolupindade ja voolutorudega. ✓

Helmholtzi esimene teoreem: *igas keeristoru lõikes on summaarne keeriselisus sama, mis suvalises teises keeristoru lõikes.*

Tõestus põhineb Greeni-Gaussi teoreemil — $\int_v \operatorname{div} \mathbf{w} dv = \int_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da$. Kuna $\mathbf{w} = \operatorname{curl} \mathbf{v}$ ja $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{v}) = 0$, siis

$$\int_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (3.273)$$

Keerisvektor \mathbf{w} on keeristoru külgpinna puutuja. Järelikult seal $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$. Tähistame s_1 ja s_2 keeristoru kaht suvalist lõiget välisnormaalidega \mathbf{n}_1 ja \mathbf{n}_2 . Seega nimetatud otspindadel

$$\int_{s_1} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_1 da = - \int_{s_2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_2 da. \quad (3.274)$$

Seega on keeriselisus lõigetes s_1 ja s_2 arvuliselt võrdne —

$\int_s \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da = \text{const}$. See konstant on igal torul erinev ja iseloomustab vaadeldavat toru.

Järeldus: Keerisjooned (keeristorud) ei saa alata ega lõppeda suvalises vedeliku punktis – nad on kas kinnised või algavad ja lõpevad keskkonna rajal (k.a. $\pm\infty$).