Peatükk 7

Olekuvõrrandid

7.1 Sissejuhatus

Vastavalt pideva keskkonna neljale põhiaksioomile oleme saanud põhivõrrandite süsteemi, mis koosneb kaheksast sõltumatust võrrandist[1].

1. *Massi jäävuse seadus* võib olla esitatud ruumilise pidevusvõrrandi (4.7) abil — 1 võrrand
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho v_k\right)_{,k}\,. \tag{7.1}$$

[1]Käesolevas peatükis on taas kasutusel DRK ja seega ei eristata ko- ja kontravariantseid koordinaate.

2. *Cauchy esimene liikumisseadus ehk liikumishulga tasakaalu seadus*, näiteks kujul $(4.35)_1$ — 3 võrrandit
$$t_{jk,j} + \rho\left(f_k - a_k\right) = 0. \tag{7.2}$$
3. *Cauchy teine liikumisseadus ehk kineetilise momendi tasakaalu seadus*, näiteks kujul $(4.35)_2$ — 3 võrrandit
$$t_{kl} = t_{lk}. \tag{7.3}$$
4. *Energia jäävuse seadus*, näiteks kujul (5.11) — 1 võrrand
$$\rho\dot{\varepsilon} = t_{pr}d_{rp} + q_{p,p} + \rho h. \tag{7.4}$$

Ülaltoodud 8 võrrandit kehtivad iga mehaanikalise keskkonna (tahke keha, vedelik, gaas) puhul. Kuid sama geomeetria ja/või massi puhul võivad erinevast materjalist kehad või keskkonnad käituda sama välismõju all erinevalt. Mõõduka suurusega välisjõu toimel enamus tahkistest deformeerub kergelt, kuid vedelik hakkab voolama; puidust ja metallist kehad käituvad sama geomeetria ja sama välismõju korral erinevalt; jne.

Kui läheneda võrrandeile (6.1)–(6.4) matemaatiliselt, siis tuleb konstanteerida järgmist fakti: selleks, et võrrandisüsteemil eksisteeriks ühene lahend, peab tundmatute arv ja võrrandite arv olema võrdne. Meil on kaheksa võrrandit. Tundmatute arv on aga paraku tunduvalt suurem. Näiteks kui eeldame, et f_k, ρ ja h on antud, siis on tundmatuid kuusteist: v_k , t_{kl}, q_k ja ε. Kui tuua mängu veel entroopia ja temperatuur ning elektrilisi ja keemilisi muutujaid, läheb asi aina hullemaks ning on selgemast selgem, et kaheksa võrrandiga pole neid võimalik üheselt määrata ning on tarvis sisse tuua täiendavaid võrrandeid.

Kui aga läheneda asjale füüsikaliselt, siis on selge, et erinevate materjalide erinev käitumine on määratud nende materjalide sisemise struktuuriga ja selleks, et me saaks seda arvesse võtta on vaja sisse tuua vastavad võrrandid. Eesti keeles nimetatakse selliseid võrrandeid *olekuvõrranditeks.*[2] Tahkiste korral seovad nad tavaliselt omavahel pingetensori ja deformatsioonitensori ning vedelike korral pingetensori ja deformatsioonikiiruse tensori. Teisisõnu, *tahkiste puhul esitavad olekuvõrrandid pingete ja deformatsioonide ning vedelike puhul pingete ja deformatsioonikiiruste vahelisi seoseid.* Pideva keskkonna mehaanika raames võib enimtuntud olekuvõrrandiks pidada (üldistatud) Hooke'i seadust, mida

[2] I. k. *constitutive equations*

kasutatakse nii lineaarses elastsusteoorias kui tugevusõpetuses.

Oma olemuselt on olekuvõrrandid materjalide käitumist kirjeldavad matemaatilised mudelid, mille kehtivust on kontrollitud eksperimentaalselt. Olekuvõrrandite tuletamisel arvestatakse materjali (aine) omadusi, kuid neid ei tuletata otseselt mitte ühestki füüsikaseadusest. Samas peavad olekuvõrrandid täitma teatavaid reegleid ning olema kooskõlas tuntud füüsikaseadustega. Nende tuletamiseks on kasutatud/kasutatatkse mitmeid lähenemisviise.

Puhtmatemaatiline viis lähtub ideest, et nn. täielik võrrandisüsteem määrab füüsikalise nähtuse üheselt. See lähenemine võib aga viia ummikusse, sest (i) matemaatilised tingimused (alg- ja rajatingimused) aproksimeerivad mingit füüsikalist nähtus, kuid ilma füüsikalise põhjenduseta ei saa seda teha; (ii) üh-ese tulemuse (väljundi) nõudest ei järeldu ühene ülesande formuleering. Seega ei pruugi saadud olekuvõrrandid olla ühesed. √

Statistilisel mehaanikal põhinev viis. Kõik keskkonnad koosnevad osakestest — molekulidest, aatomitest jne. — mille vahel on sidemed. Rakendades mehaanika seadusi neile osakestele saadakse statistiline mehaanika. Nimetatud teooria puuduseks on see, et juba molekulide vaheliste jõudude olemus on ülikeerukas ja seega on täpse mudeli koostamine samuti "pisut tülikas".

Termodünaamiline viis arvestab soojuse ja temperatuuri mõju. Keerukaks võib siin osutuda tugevalt mittelineaarsete või tugevalt dissipatiivsete protsesside kirjeldamine.

Pideva keskkonna füüsikast lähtuv suund ühendab endas kõiki eeltoodud meetodeid. Ei püüta luua ühte üldist ja kõigile materjalidele ning situatsioonidele ühist olekuvõrrandit. Võimalikud on siiski teatavad grupeeringud ja üldistused (näiteks ideaalselt elastne keha, mäluga materjalid).

7.2 Olekuvõrrandite invariantsus

Olekuvõrrand defineerib idealiseeritud materjali (keskkonna). Et selline ideaalne materjal kirjeldaks füüsikalist materjali adekvaatselt, peab ta rahuldama teatavaid füüsikalisi printsiipe.

1. Välistamise (hülgamise) printsiibid. Ükski olekuvõrrand ei suuda siduda kõiki olekuparameetreid ja funktsionaale. Alati tuleb midagi hüljata. Vaadeldavad printsiibid määravad mida ja millal hüljata võib. Järgnevalt vaatleme mõnd neist.

1a. Mälu (pärilikkuse) arvestamine — materjali käitumine ajahetkel t on määratud tema minevikuga kuni selle ajahetkeni (mälu). See on teatavas vastuolus klassikalise Newtoni mehaanikaga, kus algtingimusega ($t = 0$) on nii minevik kui tulevik täielikult määratud. Antud printsiibist lähtudes saame tingimused, et hüljata olekuvõrrandist järgnevad ajahetked.

1b. Ümbruse printsiip — hetkel t ruumipunktis $\mathbf{x}$ asuva materiaalse punkti $\mathbf{X}$ käitumine on määratud vaadeldava materiaalse punkti $\mathbf{X}$ suvalise väikese ümbruse käitumisega.

1a. ja 1b. kokku annavad **determinismi printsiibi** — Hetkel t ruumipunktis $\mathbf{x}$ asuva materiaalse punkti $\mathbf{X}$ käitumine on määratud vaadeldava materiaalse punkti $\mathbf{X}$ ümbruse käitumise (liikumise) ajalooga.

1c. Võrdse kohaloleku printsiip ehk sõltumatute olekuparameetrite valiku ühesuse printsiip — ühe teooria raames peavad sama materjali kõik olekuvõrrandid sisaldama samu sõltumatuid olekuparameetreid.

1d. Unifitseerimise printsiip — erinevad olekuparameetrid, mis iseloomustavad erinevaid materjale võivad esineda kõigi materjalide olekuvõrrandites. (Kasutatakse juhul kui tahetakse luua ühist olekuteooriat erinevatele materjalidele.)

2. Invariantsus koordinaatteisenduste suhtes nõuab, et olekufunktsioonid oleksid absoluutsed tensorfunktsioonid oma argumentidest — seega et nad oleksid invariantsed koordinaatteisenduste suhtes.

3. Ruumiline invariantsus. Olekuvõrrandid peavad olema invariantsed ruumikoordinaatide jäiga liikumise suhtes. Füüsikaliselt tähendab see seda, et olekuvõrrandid ei tohi sõltuda vaatleja asukohast. St., et kui üks liikumine toimub teljestikus $\mathbf{x}$ hetkel t ja teine teljestikus $\mathbf{x}'$ hetkel t' siis olekuvõrrandeis olevad ‡
funktsioonid $f_{kl}(\mathbf{x}, t)$ ja $f_{kl}(\mathbf{x}', t')$ oleksid samad (langeksid kokku).

4. Materiaalne invariantsus (materiaalne isomorfism). Kui olekuvõrrandid on invariantsed mingi materiaalsete koordinaatide teisenduse rühma suhtes, siis öeldakse, et olekuvõrrandid omavad materiaalset sümmeetriat vaadeldava teisenduse rühma suhtes. Näiteks peegeldused, pöörded. Materjali sümmeetriat on kasulik ette teada, sest see lihtsustab olekuvõrrandeid. Näiteks on metallide elastsed omadused antud punktis invariantsed igas suunas. Sellist materjali omadust nimetatakse *isotroopsuseks*. Selle vastand on *anisotroopne* materjal. On aineid, millel näiteks mehaanikalised omadused on isotroopsed, kuid elektrilised anisotroopsed.

Teine tähtis materjali omadus siin on homogeensus. Materjali, mille omadused ei

sõltu materiaalsest koordinaadist, nimetatakse *homogeenseks* materjaliks. Vastupidisel juhul nimetame aga materjali *mittehomogeenseks ehk heterogeenseks.*

5. Mõõtühikutest sõltumatuse printsiip ehk dimensionaalne invariantsus. Olekuvõrranditesse kuuluvad materjalikonstandid või moodulid peavad olema mõõtühikute suhtes invariantsed.

6. Sobivuse printsiip. Kõik olekuvõrrandid peavad olema vastavuses massi, liikumishulga, energia jt. füüsikaliste suuruste kohta kehtivate seaduste, aksioomide ja põhiprintsiipidega.

7.3 Ideaalselt elastse keskkonna olekuvõrrandid — Greeni meetod

Ideaalselt elastne keha (keskkond) on keha, kus pinge sõltub vaid deformatsioonist. Täpsemalt öeldes, ideaalselt elastse keha korral (i) eeldatakse, et väliskoormuse mõjul ei toimu mitte mingeid elektrilisi, keemilisi ja termodünaamilisi nähtusi; (ii) keha jaoks defineeritakse *loomulik olek*, kus deformatsioonid ja pinged puuduvad, temperatuur ja teised väljad on konstantsed ja ühesugused igas punktis ning eeldatakse, et kui välisjõud eemaldada, siis keha loomulik olek taastub. Seega hüljatakse temperatuur ja kõik teised väljad, eeldades, et nad väliskoormuse mõjul ei muutu. Järelikult on tegu nullise dissipatsiooniga ja järelikult kogu energia, mis kulub deformatsiooniks, saab välisjõu eemaldamisel tagasi. Sellisel juhul saab olekuvõrrandi tuletamiseks kasutada *Greeni meetodit*, mille puhul eeldatakse, et siseenergia on deformatsiooni funktsioon. Selliseid kehi nimetatakse tihti *hüperelastseteks kehadeks.*

Definitsioon: Keha nimetatakse hüperelastseks kui ta omab deformatsioonienergiat kujul

$$\rho_\circ \varepsilon \equiv \Sigma = \Sigma \left(X_K, x_k, \delta_{kK}, \rho, \mathbf{I}_K, x_{k,K} \right), \tag{7.5}$$

nii et

$$\frac{\rho}{\rho_\circ} \dot{\Sigma} = t_{kl} d_{lk}. \tag{7.6}$$

Avaldise (7.21) parem pool esitab pinge võimsust. Valemi (7.5) põhjal võib vaadeldav materjal olla mittehomogeene ja anisotroopne, gradiendid $x_{k,K}$ toovad sisse ümbruse printsiibi. Σ sõltub vaid konfiguratsioonist hetkel t ja mitte minevikust. Seega on tegu nn. *lihtsa materjaliga*, mille mälu piirdub vaid algolekuga (loomuliku olekuga). Valemi (7.6) põhjal pole antud keskkond soojust juhtiv.

Lähtudes massi jäävuse seadusest (pidevuse võrrand), invariantsuse nõuetest ja tensoranalüüsist saab funktsiooni Σ avaldisest (7.5) ellimineerida mitmeid argumente ning näidata, et avaldis (7.5) on ekvivalentne avaldisega

$$\Sigma = \Sigma \left(X_K, \mathbf{I}_K, C_{KL} \right), \tag{7.7}$$

mida käsitletakse kui deformatsioonienergia funktsiooni üldist kuju. Teame, et deformatsioonitensori C_{KL} jaoks saab leida peaväärtused C_1, C_2, C_3 ning, et viimased on funktsioonid invariantidest I_C, II_C ja III_C. Seega saab deformatsioonienergia funktsiooni esitada kujul

$$\Sigma = \Sigma \left(X_K, \mathbf{I}_K, C_1, C_2, C_3 \right). \tag{7.8}$$

või

$$\Sigma = \Sigma \left(X_K, \mathbf{I}_K, \mathrm{I}_C, \mathrm{II}_C, \mathrm{III}_C \right). \tag{7.9}$$

Oleme eelnevalt esitanud seosed erinevate deformatsioonitensorite ja nende invariantide vahel. Seega pole tegelikult vahet, millist deformatsioonitensorit tema invariante või peaväärtusi kasutame:

$$\Sigma = \Sigma \left(\mathbf{X}, \mathbf{I}_K, \mathbf{C} \right) = \Sigma \left(\mathbf{X}, \mathbf{I}_K, \mathbf{E} \right) = \Sigma \left(\mathbf{X}, \mathbf{I}_K, \mathbf{c} \right) = \Sigma \left(\mathbf{X}, \mathbf{I}_K, \overset{-1}{\mathbf{c}} \right) \ldots . \tag{7.10}$$

Kokkuvõttes: *hüperelastset keha saab kirjeldada deformatsioonienergia funktsiooniga Σ, mis on ühene funktsioon materiaalsetest koordinaatidest $\mathbf{X}$, baasivektoritest $\mathbf{I}_K$ ja ühest materiaalsest või ruumilisest deformatsioonitensorist.*

Homogeense anisotroopse materjali puhul saame valemist (7.7)

$$\Sigma = \Sigma\left(\mathbf{I}_K, C_{KL}\right), \tag{7.11}$$

mittehomogeense isotroopse materjali puhul

$$\Sigma = \Sigma\left(X_K, C_{KL}\right) \tag{7.12}$$

ja *isotroopse homogeense materjali* puhu

$$\Sigma = \Sigma\left(C_{KL}\right). \tag{7.13}$$

Loomulikult võib ka avaldistes (7.11)–(7.13) kasutada C_{KL} asemel teisi deformatsioonitensoreid, nende peaväärtusi või invariante.

Asendades erinevate argumentidega deformatsioonienergia funktsioonid avaldisest (7.10) (või nende modifikatsioonidest (7.11)–(7.13)) avaldisse (7.6) saame erinevaid materjalimudeleid kirjeldavad olekuvõrrandid.

7.3.1 Näiteid erinevatest materjalimudelitest

Boussinesq'i mudel [1870, 1872]. Deformatsioonienergia Σ argumendiks on kas C_{KL} või E_{KL}. Valemist (7.6) saame nüüd

$$t_{kl}d_{kl} = \frac{\rho}{\rho_\circ}\frac{\partial\Sigma}{\partial C_{KL}}\dot{C}_{KL} = 2\frac{\rho}{\rho_\circ}\frac{\partial\Sigma}{\partial C_{KL}}x_{k,K}x_{l,L}d_{kl}. \tag{7.14}$$

Kuna viimane peab kehtima iga d_{kl} puhul, siis

$$t_{kl} = 2\frac{\rho}{\rho_\circ}\frac{\partial\Sigma}{\partial C_{KL}}x_{k,K}x_{l,L} \doteq \frac{\rho}{\rho_\circ}\frac{\partial\Sigma}{\partial E_{KL}}x_{k,K}x_{l,L}. \tag{7.15}$$

Kelvini-Cosserat' mudel (Kelvin [1863], Cosserat [1896]). Kasutab Piola-Kirchhoffi pseudopinge tensoreid. Valemite (7.6) põhjal saadakse

$$T_{Kl} = \frac{\partial\Sigma}{\partial E_{KN}}x_{l,N} \quad \text{ja} \quad T_{KL} = \frac{\partial\Sigma}{\partial E_{KL}}. \tag{7.16}$$

Neumanni-Kirchhoffi mudel. Siin valitakse sõltumatuteks muutujateks deformatsioonigradiendid $x_{k,K}$ ning lähtutakse Boussinesq'i mudelist (7.15). Avaldist

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial x_{k,M}} = \frac{\partial\Sigma}{\partial E_{KL}}\frac{\partial E_{KL}}{\partial x_{k,M}} \tag{7.17}$$

teisendades saadakse sellest Neumanni mudelile ([1860]) vastav olekuvõrrand

$$t_{kl} = \frac{\rho}{\rho_\circ}\frac{\partial \Sigma}{\partial x_{l,K}} x_{k,K}. \tag{7.18}$$

Kui tuua sisse tensor T_{Kl}, siis saame Kirchhoffi mudeli [1852]

$$T_{Kl} = \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{l,K}}. \tag{7.19}$$

Need avaldised kehtivad kokkusurutava keskkonna kohta. Kokkusurumatu materjali puhul võime ilma energia balanssi rikkumata lisada olekuvõrrandisse (7.18) nn. surveliikme, saades **Poincaré mudeli** [1892] $\surd$

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{l,K}} x_{k,K}. \tag{7.20}$$

Hameli (ruumiline) mudel [1912][3]. Antud juhul on sõltumatuteks muutujateks deformatsioonigradiendid $X_{K,k}$. Kõigepealt esitame valemi (7.6) kujul

$$t_{kl} v_{l,k} = \frac{\rho}{\rho_\circ}\frac{\partial \Sigma}{\partial X_{K,k}}\frac{D}{Dt}\left(X_{K,k}\right) = -\frac{\rho}{\rho_\circ}\frac{\partial \Sigma}{\partial X_{K,k}} X_{K,l} v_{l,k}. \tag{7.21}$$

[3] Ruumiline EK mõttes.

Kuna viimane peab kehtima suvalise $v_{l,k}$ jaoks, siis

$$t_{kl} = -\frac{\rho}{\rho_\circ}\frac{\partial \Sigma}{\partial X_{K,k}} X_{K,l}. \tag{7.22}$$

Murnaghan'i (ruumilised) mudelid [1937]. Esitab ruumilised mudelid lähtudes deformatsioonitensoreist $\overset{-1}{C}_{KL}$, c_{kl}, c_{kl} ja e_{kl} kui sõltumatutest muutujatest. Tulemused on järgmised:

$$\begin{aligned} t_{kl} &= -\frac{\rho}{\rho_\circ}\frac{\partial \Sigma}{\partial \overset{-1}{C}_{KM}}\frac{\partial \overset{-1}{C}_{KM}}{\partial X_{L,l}} X_{L,k}, \\ t_{kl} &= -\frac{2\rho}{\rho_\circ} c_{km}\frac{\partial \Sigma}{\partial c_{lm}} = \frac{\rho}{\rho_\circ}\left(\delta_{km} - 2e_{km}\right)\frac{\partial \Sigma}{\partial e_{lm}}. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Märkus. Kõik eeltoodud mudelid kehtivad ka anisotroopsete kehade puhul kui eeldada, et Σ sõltub lisaks veel ka baasivektoritest $\mathbf{I}_K$.

7.4 Elastse keskkonna olekuvõrrandid — Cauchy meetod

Cauchy meetodi korral eldatakse, et pinge on deformatsiooni funktsioon. Teda võib käsitleda kui alternatiivi Greeni meetodile. Ta kehtib ideaalselt elastsete kehade jaoks kuid on laiendatav ka dissipatiivsetele süsteemidele, kus Greeni meetod ei tööta. Seega on Cauchy meetod üldisem kui Greeni meetod. Lõpmata väikeste deformatsioonide puhul annavad mõlemad meetodid sama tulemuse.

Eeldame, et materjal on homogeenne ja anisotroopne ning pingekomponendid on ühesed funktsioonid deformatsioonigradientidest $x_{m,K}$, st.

$$t_{kl} = f_{kl}(x_{m,K}). \tag{7.24}$$

Kuna käesolevas kursuses vaatleme nn. mittepolaarset juhtu (momentpinge puudub), siis $t_{kl} = t_{lk}$ ja järelikult ka $f_{kl} = f_{lk}$ ning tegu on vaid 6 funktsiooniga. Pärast invariantsusnõuete täitmist saame pingekomponentide jaoks avaldise

$$t_{rs} = F_{RS} X_{R,r} X_{S,s}, \qquad F_{RS}(\mathbf{C}) = \delta_{kM}\delta_{lN} \overset{\frac{1}{2}}{C}_{MR} \overset{\frac{1}{2}}{C}_{NS} f_{kl}(\mathbf{C}) \tag{7.25}$$

kus $F_{RS}(\mathbf{C})$ on sümmeetriline materiaalne tensor(funktsioon), mille komponendid avalduvad LK-s ja mida nim *mõjufunktsiooniks* [4].

Tensori C_{KL} asemel võib ka siin kasutada peaväärtusi C_1, C_2, C_3 või invariante I_C, II_C, III_C. Seega võib mõjufunktsioon omada näiteks kuju

$$F_{RS} = F_{RS}(\mathrm{I}_C, \mathrm{II}_C, \mathrm{III}_C). \tag{7.26}$$

Kokkusurumatu materjali puhul asendadakse t_{rs} summaga $t_{rs} + p\,\delta_{rs}$ (kus p on *hüdrostaatiline surve* ning valem (7.25) saab kuju

$$t_{rs} = -p\,\delta_{rs} + F_{RS} X_{R,r} X_{S,s}. \tag{7.27}$$

Kuna antud juhul $\mathrm{III}_C = 1$, siis saame ümber defineerida ka mõjufunktsiooni (7.26)

$$F_{RS} = F_{RS}(\mathrm{I}_C, \mathrm{II}_C). \tag{7.28}$$

Kui materjal on anisotroopne, siis lisandub veel argument $\mathbf{I}_K$, kui aga mittehomogeene, siis $\mathbf{X}$.

Analoogiliselt Greeni meetodile saab anda olekuvõrrandile (7.25) alternatiivseid kujusid kui kasutada teisi deformatsioonitensoreid $\mathbf{c}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{e}$ . . . .

[4] I.k. *response function*

7.5 Isotroopse ideaalselt elastse tahke keha olekuvõrrandid

7.5.1 Greeni meetod

Rakendame Greeni meetodit ning eeldame, et isotroopne ideaalselt elastne keha omab deformatsioonienergiat ehk elastse pinge potentsiaali kujul

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{X}, \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}), \tag{7.29}$$

kus $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ on invariandid ühest deformatsioonitensorist $\mathbf{C}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{E}$ jne. Lähtume Murnaghan'i mudelist $(7.23)_2$ —

$$t_{kl} = -\frac{2\rho}{\rho_\circ} c_{km} \frac{\partial \Sigma}{\partial c_{lm}}. \tag{7.30}$$

Osatuletis

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial c_{lm}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial c_{lm}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}} \frac{\partial \mathrm{II}}{\partial c_{lm}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{III}} \frac{\partial \mathrm{III}}{\partial c_{lm}}. \tag{7.31}$$

Kasutadades invariantide I_c, II_c ja III_c (tegelikult determinantide) arvutusvalemeid, saame avaldada osatuletised invariantidest kujul

$$\frac{\partial \mathrm{I}_c}{\partial c_{lm}} = \delta_{lm}, \qquad \frac{\partial \mathrm{II}_c}{\partial c_{lm}} = \mathrm{I}_c \delta_{ml} - c_{ml}, \qquad \frac{\partial \mathrm{III}_c}{\partial c_{lm}} = c_{mn} c_{nl} - \mathrm{I}_c c_{ml} + \mathrm{II}_c \delta_{ml}. \tag{7.32}$$

Kuna $\rho/\rho_\circ = 1/j = \sqrt{\mathrm{III}_c}$, siis tähistades

$$\begin{cases} a_0(\mathbf{X}, \mathrm{I}_c, \mathrm{II}_c, \mathrm{III}_c) = -2\,(\mathrm{III}_c)^{\frac{3}{2}} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{III}_c}, \\ a_1(\mathbf{X}, \mathrm{I}_c, \mathrm{II}_c, \mathrm{III}_c) = -2\sqrt{\mathrm{III}_c} \left(\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_c} + \mathrm{I}_c \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}_c} \right), \\ a_2(\mathbf{X}, \mathrm{I}_c, \mathrm{II}_c, \mathrm{III}_c) = 2\sqrt{\mathrm{III}_c} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}_c} \end{cases} \tag{7.33}$$

ja kasutades valemeid (7.31) ja (7.32) saame anda avaldisele (7.30) kuju

$$t_{kl} = a_0 \delta_{kl} + a_1 c_{kl} + a_2 c_{km} c_{ml}. \tag{7.34}$$

Et saada lahti $c_{km}c_{mn}$ tüüpi liikmetest kasutatakse Cayley-Hamiltoni teoreemi maatriksi $[c_{kl}]$ jaoks[5] ning elimineerime selle abil $c_{km}c_{ml}$ valemis (7.34). Tulemusena saame pinge-deformatsiooni seose, mis on tuntud kui *Fingeri [1894] olekuvõrrand* —

$$t_{kl} = b_{-1}\overset{-1}{c}_{kl} + b_0\delta_{kl} + b_1 c_{kl}, \tag{7.35}$$

kus †

$$\begin{cases} b_{-1} = 2\left(\mathrm{III}_c\right)^{\frac{3}{2}} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}_c}, \\ b_0 = -2\sqrt{\mathrm{III}_c}\left(\mathrm{II}_c \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}_c} + \mathrm{III}_c \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{III}_c}\right), \\ b_1 = -2\sqrt{\mathrm{III}_c}\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_c}. \end{cases} \tag{7.36}$$

Kokkusurumatu materjali puhul $\mathrm{III}_c = 1$ ja lisandub hüdrostaatiline surve p —

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_{\overset{-1}{c}}}\overset{-1}{c}_{kl} - 2\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}_{\overset{-1}{c}}} c_{kl}. \tag{7.37}$$

Viimane on tuntud kui *Ariano [1939] ja Rivlini [1948] olekuvõrrand*.

[5] Maatriks $[c_{kl}]$ rahuldab karakteristlikku võrrandit $c_{km}c_{mn}c_{nl} - \mathrm{I}_c c_{km}c_{ml} + \mathrm{II}_c c_{kl} - \mathrm{III}_c \delta_{kl} = 0$

Loomulikus olekus on keskkond pinge- ja deformatsioonivaba. Pannes tingimuse $t_{kl} = 0$ olekuvõrrandisse (7.35), saame täiendava tingimuse deformatsioonienergia funktsioonile Σ — √

$$\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_{\overset{-1}{c}}}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}_{\overset{-1}{c}}}\right)_0 + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{III}_{\overset{-1}{c}}}\right)_0 = 0. \tag{7.38}$$

Võrrandi (7.35) saab esitada ka läbi peapikenemiste ja peapingete:

$$t_\alpha = b_{-1}\lambda_\alpha^2 + b_0 + b_1\lambda_\alpha^{-2}. \tag{7.39}$$

On loomulik eeldada, et

$$t_\alpha \geq t_\beta \ \text{ alati kui } \ \lambda_\alpha \geq \lambda_\beta. \tag{7.40}$$

Avaldades valemites (7.36) invariandid peapikenemiste λ_α kaudu, saame võrratusest (7.40) (kasutades (7.39)) lisatingimused olekuvõrranditele †

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_{\overset{-1}{c}}} + \lambda_\alpha^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}_{\overset{-1}{c}}} \geq 0 \tag{7.41}$$

Samad tingimused (7.41) kehtivad ka kokkusurumatu materjali jaoks.

7.5.2 Cauchy meetod

Lähtudes paragrahvis 7.4 toodud mudelist on võimalik jõuda olekuvõrrandini

$$t_{kl} = g_0\delta_{kl} + g_1 \overset{-1}{c}_{kl} + g_2 \overset{-1}{c}_{km} \overset{-1}{c}_{ml}, \tag{7.42}$$

kus g_α sõltuvad vaid deformatsioonitensori invariantidest. Rakendades viimasele avaldisele Cayley-Hamiltoni teoreemi saame olekuvõrrandi

$$t_{kl} = h_{-1} \overset{-1}{c}_{kl} + h_0\delta_{kl} + h_1 c_{kl}, \tag{7.43}$$

kus

$$h_{-1} = g_1 + g_2 \mathrm{I}_{\overset{-1}{c}}, \quad h_0 = g_0 - g_2 \mathrm{II}_{\overset{-1}{c}}, \quad h_1 = g_2 \mathrm{III}_{\overset{-1}{c}} \tag{7.44}$$

ja mis on kujult sama, mis Greeni mudelile vastav olekuvõrrand (7.35). Greeni meetodi elastsuskonstandid b_α avaldusid läbi potentsiaali Σ. Konstantide h_α seos selle potentsiaaliga vajab selgitamist. Nimelt, saab näidata, et kui h_α rahuldavad tingimusi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_{-1}}{\partial \mathrm{I}_c} = -\mathrm{II}_c \dfrac{\partial h_1}{\partial \mathrm{II}_c}, \\ \dfrac{h_1}{2} + \mathrm{III}_c \dfrac{\partial h_1}{\partial \mathrm{III}_c} = \dfrac{\partial h_0}{\partial \mathrm{I}_c} + \dfrac{\mathrm{II}_c}{\mathrm{III}_c} \dfrac{\partial h_{-1}}{\partial \mathrm{I}_c}, \\ \dfrac{h_{-1}}{2} - \mathrm{III}_c \dfrac{\partial h_{-1}}{\partial \mathrm{III}_c} = h_{-1} + \mathrm{II}_c \dfrac{\partial h_{-1}}{\partial \mathrm{II}_c} + \mathrm{III}_c \dfrac{\partial h_0}{\partial \mathrm{II}_c}, \end{cases} \tag{7.45}$$

siis leidub deformatsioonienergia funktsioon Σ nii, et Greeni meetodil saadud olekuvõrrandid (7.35) ühtivad Cauchy meetodil saadud võrranditega (7.43). Seega tõepoolest on Cauchy meetod üldisem.

7.6 Isotroopsete ideaalselt elastsete tahkete kehade olekuvõrrandite aproksimatsioonid

Lõpmata väikeste deformatsioonide puhul annab Cauchy meetod 36 elastsuskonstanti, Greeni meetod aga 21. Nii 21 kui 36 konstanti on liiga palju. Katseliselt pole neid võimalik määrata. Seega on vaja asendada olekuvõrrandid teiste, neist vähe erinevate võrranditega. Selleks on vaja matemaatilisi ja füüsikalisi lisaeeldusi, mis mudelit lihtsustaksid.

Näiteks:
1) Materjali deformatsioonipiirkond enne purunemist on piiratud — osa materjale puruneb juba väikeste deformatsioonide puhul.
2) Kokkusurumatu materjali mudel — osadel kehadel muutub maht väga vähe.

Polünomiaalne aproksimatsioon deformatsioondes[6]

Iga meid huvitav funktsioon on arendatav astmeritta. Olgu potentsiaal (deformatsioonienergia) Σ funktsioon mingist deformatsiooni mõõdust. Arendame ta ritta nn. loomuliku oleku suhtes. Olgu näiteks $\Sigma = \Sigma(E_{KL})$ või $\Sigma = \Sigma(e_{kl})$ ja arendame nad astmeritta $C_{KL} = \delta_{KL}$ või $c_{kl} = \delta_{kl}$ ümbruses. Säilitades liikmed vaid teatud astmeteni, saame kaks enamlevinud aproksimatsiooni

$$\Sigma = \alpha_E \mathrm{I}_E + \frac{1}{2}(\lambda_E + 2\mu_E)(\mathrm{I}_E)^2 + 2\mu_E \mathrm{II}_E + l_E(\mathrm{I}_E)^3 + m_E \mathrm{I}_E \mathrm{II}_E + n_E \mathrm{III}_E \ldots \quad (7.46)$$

ja

$$\Sigma = \alpha_e \mathrm{I}_e + \frac{1}{2}(\lambda_e + 2\mu_e)(\mathrm{I}_e)^2 + 2\mu_e \mathrm{II}_e + l_e(\mathrm{I}_e)^3 + m_e \mathrm{I}_e \mathrm{II}_e + n_e \mathrm{III}_e \ldots \quad (7.47)$$

Kasutades $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{e}$ invariantide vahelisi seoseid saab tuletada vastavate konstantide vahelised seosed (mida siin ei esita).

[6]Täpsemalt öeldes kasutatakse siin Lagrange'i ja Euleri deformatsioonitensorite komponente

Kelvini-Cosserat' mudeli $(7.16)_2$, s.o.

$$T_{KL} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}}$$

põhjal saame nüüd

$$\begin{aligned} T_{KL} = & \left[\alpha_E + \lambda_E \mathrm{I}_E + (3l_E + m_e)(\mathrm{I}_E)^2 + (m_E + n_E)\mathrm{II}_E + \ldots\right]\delta_{KL} + \\ & + \left[2\mu_E - (m_E + n_E)\mathrm{I}_E + \ldots\right]E_{KL} + (n_E + \ldots)E_{KM}E_{ML}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Murnaghan'i ruumilisest mudelist $(7.23)_2$ s.o.

$$t_{kl} = \frac{\rho}{\rho_\circ}(\delta_{km} - 2e_{km})\frac{\partial \Sigma}{\partial e_{lm}},$$

aga saame

$$\begin{aligned} t_{kl} = & \left[\alpha_e + (\lambda_e - \alpha_e)\mathrm{I}_e + \left(3l_e + m_e - \lambda_e - \frac{\alpha_e}{2}\right)(\mathrm{I}_e)^2 + (m_e + n_e - 2\alpha_e)\mathrm{II}_e + \right. \\ & \left. + \ldots\right]\delta_{kl} + \left[2(\mu_e - \alpha_e) - (m_e + n_e + 2\lambda_e + 2\mu_e - 2\alpha_e)\mathrm{I}_e + \ldots\right]e_{kl} + \\ & + (-4\mu_e + n_e + \ldots)e_{km}e_{ml}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Nii võrrandis (7.48) kui ka (7.49) on piirdutud deformatsioonikomponentide ruutudega — kõrgemat järku liikmed on hüljatud.

Loomulikus olekus $\mathbf{E} = \mathbf{e} = 0$ ja seega $T_{KL} = \alpha_E \delta_{KL}$ ja $t_{kl} = \alpha_e \delta_{kl}$, mis esitab hüdrostaatilist survet $p = -\alpha_E = -\alpha_e$. Kui loomulik olek on pingevaba, siis $\alpha_E = \alpha_e = 0$.

Nn. esimest järku teooria annab vtl. juhul olekuvõrrandid

$$\begin{cases} T_{KL} = \lambda_E \mathrm{I}_E \delta_{KL} + 2\mu_E E_{KL} \\ t_{kl} = \lambda_e \mathrm{I}_e \delta_{kl} + 2\mu_e e_{kl} \end{cases} \tag{7.50}$$

See pole aga mitte midagi muud kui *üldistatud Hooke'i seadus*[7] klassikalise (st. lineaarse) isotroopse elastsusteooria jaoks ja konstandid λ ja μ on tuntud kui *Lamé konstandid ehk Lamé koefitsendid* [8], mille seos Youngi mooduli E, Poissoni teguri ν ning nihkeelastsusmooduliga G on järgmine:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = G. \tag{7.51}$$

[7]Eringeni põhjal on see tuntud ka kui Hooke'i–Cauchy' seadus.

[8]Elastsusteoorias on kombeks nimetada valemites (7.48) ja (7.49) esinevaid konstante järgmiselt α — esimest järku elastsuskonstant; λ, μ — teist järku elastsuskonstandid; l, m, n — kolmandat järku elastsuskonstandid. Järgud on vastavuses avaldistega (7.46) ja (7.47).

Selle teooria puhul on deformatsioonid nii väikesed, et erinevus E_{KL} ja e_{kl} vahel kaob ning e_{kl} asemel vaadeldakse lõpmata väikeste deformatsioonide tensorit

$$\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right). \tag{7.52}$$

Pannes (7.52) ja $(7.50)_2$ Cauchy esimesse liikumisseadusse, saame võrrandi

$$(\lambda_e + \mu_e) u_{k,kl} + \mu_e u_{l,kk} + \rho\left(f_l - \ddot{u}_l\right) = 0, \tag{7.53}$$

mis on tuntud kui *Navier'–Lamé võrrand* ning mängib tähtsat rolli klassikalises homogeensete isotroopsete elastsete kehade elastsusteoorias (meenuta elastsusteooria aluste kursust, kus analoogilised võrrandid olid esitatud Lamé võrrandite nime all).

Kui lisaks Lamé koefitsentidele λ ja μ on kasutusel ka kolmandat järku konstandid l, m ja n. siis on tegu nn. viiekonstandilise elastsusteooriaga. Sel juhul on tegu füüsikalise mittelineaarsusega, sest pingete ja deformatsioonide vahelised seosed on loetud mittelineaarseteks.

Kokkusurumatu materjali jaoks kasutatakse tavaliselt *Mooney-Rivlini arendust*, mis on leitud olevat mugavam —

$$\Sigma = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_{rs}\left(\mathrm{I}_{\underset{c}{-1}}-3\right)^{r}\left(\mathrm{II}_{\underset{c}{-1}}-3\right)^{s}, \tag{7.54}$$

Tavaliselt kasutatakse siin varianti, mille korral jäävad alles vaid liikmed, kus $r=0, s=1$ ja $r=1, s=0$, st.,

$$\Sigma = \alpha\left(\mathrm{I}_{\underset{c}{-1}}-3\right)+\beta\left(\mathrm{II}_{\underset{c}{-1}}-3\right), \tag{7.55}$$

kus $\alpha \geq 0$ ja $\beta \geq 0$ on tarvilik ja piisav, et $\Sigma \geq 0$.

Polünomiaalne aproksimatsioon siirdegradientides

Deformatsioonienergia funktsiooni on võimalik avaldada kui polünoomi siirdegradientidest $U_{K,L}$ või $u_{k,l}$ —

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_N \tag{7.56}$$

Kus Σ_M on M astme homogeene polünoom gradientidest $U_{K,L}$. Kui loomulik † olek on pingevaba, siis $\Sigma_1 = 0$, ülejäänud sõltuvad E_{KL}-st. Teist järku aproksimatsiooni jaoks näiteks $\Sigma = \Sigma_2 = A_{KLMN}\widetilde{E}_{KL}\widetilde{E}_{MN}$, kus materjalikonstandid A_{KLMN} peavad rahuldama tingimusi $A_{KLMN} = A_{LKMN} = A_{KLNM} = A_{MNKL}$, mis tagab, et $\Sigma \geq 0$.

7.7 Elastsusteooria põhivõrrandite süsteem

Elastsusteooria ülesannete lahendamiseks tuleb koostada võrrandisüsteem, millel lahend peab olema ühene. Selleks tuleb kasutada jäävusseadusi, olekuvõrrandeid, geomeetrilisi ja kinemaatilisi seoseid, alg- ja rajatingimusi ning vajadusel ka pidevustingimusi. Käesolevas paragrahvis esitame elastsusteooria põhivõrrandite süsteemi[9] tahkiste jaoks ja järgmises vaatleme vedelikke. Lihtsuse mõttes piirdume ka tahkiste korral Euleri koordinaatidega.

1. Massi jäävuse seadus.

$$\frac{\rho}{\rho_\circ} = \sqrt{\mathrm{III}_c} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{III}_{\underset{c}{-1}}}}. \tag{7.57}$$

2. Cauchy I ja II liikumisseadus.

$$\begin{cases} t_{kl,l} + \rho\left(f_k - a_k\right) = 0, \\ t_{kl} = t_{lk}. \end{cases} \tag{7.58}$$

[9]Võib öelda ka elastsusteooria fundamentaalne võrrandisüsteem. Tihti öeldakse ka, et tegu on nn. kinnise võrrandisüsteemiga (i.k. *closed system*). Viimase all mõistetakse peaasjalikult just seda, et võrrandisüsteem oleks selline, millel on ühene lahend.

3. Keskkonna olekuvõrrandid (isotroopne keskkond).
a) kokkusurutav — näiteks Fingeri olekuvõrrand (7.35)

$$t_{kl} = b_{-1} \overset{-1}{c}_{kl} + b_0 \delta_{kl} + b_1 c_{kl}, \tag{7.59}$$

$$\begin{cases} b_{-1} = 2 \left(\mathrm{III}_c\right)^{\frac{3}{2}} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}_c}, \\ b_0 = -2\sqrt{\mathrm{III}_c} \left(\mathrm{II}_c \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}_c} + \mathrm{III}_c \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{III}_c} \right), \\ b_1 = -2\sqrt{\mathrm{III}_c} \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_c}. \end{cases} \tag{7.60}$$

b) kokkusurumatu — näiteks Ariano-Rivlini olekuvõrrand (7.37)

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_{\overset{-1}{c}}} \overset{-1}{c}_{kl} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}_{\overset{-1}{c}}} c_{kl}. \tag{7.61}$$

Olekuvõrrandid peavad rahuldama lisatingimusi (7.41)

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}_{\overset{-1}{c}}} + \lambda_\alpha^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}_{\overset{-1}{c}}} \geq 0. \tag{7.62}$$

4. Geomeetrilised ja kinemaatilised seosed.
Deformatsioonitensorid —

$$c_{kl} = X_{K,k} X_{L,l}, \qquad \overset{-1}{c}_{kl} = x_{k,K} x_{l,L}. \tag{7.63}$$

Kiirus ja kiirendus —

$$v_k = \frac{Du_k}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u_{k,l} v_l, \qquad a_k = \frac{Dv_k}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v_{k,l} v_l. \tag{7.64}$$

5. Algtingimused. Algtingimused kirjeldavad olukorda mahus $\mathcal{V}$ alghetkel $t = 0$ —

$$x_k(\mathbf{X}, 0) = x_{0k}, \quad \dot{x}_k(\mathbf{X}, 0) = v_{0k}. \tag{7.65}$$

6. Rajatingimused. Kui keha pinnal (keskkonna piiril) S on pinged $t_{(\mathbf{n})k}$ teada, siis

$$t_{(\mathbf{n})k} = t_{lk} n_l = s_k, \quad \text{pinnal} \ \ S. \tag{7.66}$$

Kui on teada pinna S siirdeid, siis

$$x_k(\mathbf{X}) = f_k \ \ \text{või} \ \ u_k(\mathbf{X}) = g_k \ \ \mathbf{X} \in S. \tag{7.67}$$

Võimalik on ka nn. segarajatingimuste juht, kus osal rajapinnal on antud siirded, osal pinged.

7. Pidevus- ehk sobivustingimused. Juhul kui põhimuutujateks on deformatsioonid või pinged, või kui teoorias esineb olulisi lihtsustusi (näiteks plaatide ja koorikute teoorias), läheb vaja veel nn. sobivus- ehk pidevustingimusi.

7.8 Vedelike dünaamika

7.8.1 Stokesi vedelik ja Newtoni vedelik

Eelmistes alajaotustes vaatlesime elastseid materjale, st. materjale, kus pinge sõltus vaid deformatsioonist. Taoliste materjalide puhul on tähtis teatud deformeerumata olek, mida nimetetakse loomulikuks olekuks. Selline käitumine on tavaliselt omane tahkistele (tahketele kehadele).

Teise tähtsa materjalide klassi moodustavad vedelikud. Tegelikult on kõik vedelikud *kokkusurutavad ja viskoossed*. Kuna aga nimetatud omadused varieeruvad vedelike puhul väga suurtes piirdes, siis on väga tihti võimalik vähemalt üht neist hüljata. Väga suur osa vedelikest on praktiliselt kokkusurumatud. Edaspidises piirdumegi vaid kokkusurumatute vedelikega.

Viskoossete vedelike puhul on leitud, et pinged sõltuvad deformatsiooni kiirusest. Täpsemalt öeldes, pingetensor sõltub deformatsioonikiiruse tensorist. Sellist vedelikku nimetatakse *Stokesi vedelikuks.* Vedelikku, mille korral viskoossed efektid on hüljatud, nimetatakse *ideaalseks vedelikuks*.

Stokesi vedeliku olekuvõrrand on esitatav kujul

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + {}_Dt_{kl}(d_{qs}), \quad {}_Dt_{kl}(0) = 0. \tag{7.68}$$

kus p on hüdrostaatiline surve ja ${}_Dt_{kl}$ viskoossusest põhjustatud dissipatiivne pinge. Kui deformatsioonikiirus on null, on null ka vastav dissipatiivne pinge. Kui kokkusurumatu vedeliku olekuvõrrand on esitatud kujul

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\mu d_{kl}, \tag{7.69}$$

st., pinge ${}_Dt_{kl}$ ja deformatsioonikiiruse d_{kl} vaheline seos on lineaarne, siis nimetatakse teda *Newtoni vedelikuks*. Viimases nimetatakse kordajat $\mu \geq 0$ *viskoossuskoefitsendiks.*

7.8.2 Vedelike dünaamika põhivõrrandite süsteem

Vedelike dünaamika põhivõrrandite süsteem on oma olemuselt analoogiline elastsusteooria põhivõrrandite süsteemiga, koosnedes jäävusseadustest, olekuvõrrandeist, kinemaatilistest (geomeetrilistest) seostest ning raja- ja algtingimustest.

1. Massi jäävuse seadus:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0. \tag{7.70}$$

2. Cauchy I ja II liikumisseadus:

$$\begin{cases} t_{kl,l} + \rho\,(f_k - a_k) = 0, \\ t_{kl} = t_{lk}. \end{cases} \tag{7.71}$$

3. Olekuvõrrandid (kokkusurumatu Stokesi vedelik):

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + {}_Dt_{kl}(d_{qs}), \quad {}_Dt_{kl}(0) = 0. \tag{7.72}$$

Aproksimatsioonid

1) Lineaarne (*Newtoni vedelik*)

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\mu d_{kl}. \tag{7.73}$$

2) Ruutpolünoom

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + \alpha_1 d_{kl} + \alpha_2 d_{km} d_{ml}, \tag{7.74}$$

kus kordajad

$$\alpha_\gamma = \alpha_\gamma(\mathrm{II}_d, \mathrm{III}_d), \ \gamma = 1, 2 \tag{7.75}$$

peavad rahuldama tingimusi

$$-2\alpha_1 \mathrm{II}_d + \alpha_2 \mathrm{III}_d \geq 0. \tag{7.76}$$

4. Kinemaatilised seosed:

Deformatsioonikiiruse tensor

$$2d_{kl} = v_{k,l} + v_{l,k} \tag{7.77}$$

kiirus ja kiirendus

$$v_k = \frac{Dx_k}{Dt}, \qquad a_k = \frac{Dv_k}{Dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l}v^l. \tag{7.78}$$

5. Raja- ja algtingimused:

Kui pinge $t_{(\mathbf{n})k}$ on ette antud pinnal S, siis rajatingimused esitatakse kujul

$$t_{(\mathbf{n})k} = t_{lk}n_l = s_k, \qquad \text{pinnal } S. \tag{7.79}$$

Lamb tõestas, et vabal vedeliku pinnal või eri vedelike kontaktpinnal peab pingevektor olema pidev funktsioon. Siit järeldub kiirusvektori pidevus vaadeldaval pinnal.

Tahke keha ja vedeliku kontaktpinna puhul on vaidlusaluseks küsimuseks olnud hõõrde arvesse võtmine. Klassikalises teoorias hõõret ei arvetata, st. kiiruste erinevus vedeliku ja tahke keha pinnal

$$\Delta \mathbf{v} = 0. \tag{7.80}$$

Levinuim kompromiss —

$$\Delta \mathbf{v}_n = 0, \qquad \Delta \mathbf{v}_t = \kappa \mathbf{t}_t, \tag{7.81}$$

kus indeksid n ja t tähistavad kiirus- ja pingevektori normaali ja puutujasuunalisi komponente. Koefitsent κ sõltub termodünaamilistest muutujatest. Üldiselt on κ väärtus nulli lähedane, v.a. väikestel survetel.

Algtingimustega antakse ette kiiruste väli $\mathbf{v}$ kogu vedeliku mahu $\mathcal{V}$ ulatuses, st.

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \tag{7.82}$$

Seega määratlevad alg- ja rajatingimused vedeliku oleku vastavalt alghetkel ja vaadeldavat mahtu $\mathcal{V}$ ümbritseval pinnal S. Nad peavad olema sellised, et võrrandisüsteemi lahend oleks ühene.

Ülaltoodud võrranditele ja seostele võib sõltuvalt ülesande iselooomust lisanduda näiteks energia jäävuse seadus, Fourier' soojusjuhtivuse seadus jne., jne.

7.8.3 Navier'-Stokesi võrrandid

Kui asendame pingetensori olekuvõrrandist (7.69) Cauchy esimesse liikumisseadusesse (liikumishulga tasakaalu seadus)

$$t_{kl,l} + \rho(f_k - a_k) = 0$$

ning arvestame, et deformatsioonikiiruse tensor

$$2d_{kl} = (v_{k,l} + v_{l,k}),$$

siis saame kuulsad *Navier'-Stokesi võrrandid* kokkusurumatu materjali jaoks —

$$\rho\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l}v_l\right) = \rho f_k - p_{,k} + \mu\left(v_{k,l} + v_{l,k}\right)_{,l}. \tag{7.83}$$

Kokkusurumatuse tingimust võib vaadelda kui tiheduse ρ konstantsust ajas $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ ja ruumis $\nabla \cdot \rho \equiv \rho_{,k} = 0$. Seega, lokaalse massi jäävuse seaduse põhjal

$$\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{=0} + (\rho v_k)_{,k} = \underbrace{\rho_{,k}}_{=0} v_k + \rho v_{k,k} = \rho v_{k,k} = 0.$$

Seega on vedeliku kokkusurumatuse tingimus väljendatav kujul

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = v_{k,k} = 0. \tag{7.84}$$

Teisisõnu, kokkusurumatu vedeliku puhul on kiiruse divergents null. Vedelike korral on tingimust (7.84) mugav kasutada, sest nende käitumise uurimisel ongi peatähelepanu pööratud kiirusele $\mathbf{v}$.

Arvestades kokkusurumatuse tingimust (7.84) on võrrandi (7.83) p.p. viimane liige $v_{l,kl} = (v_{l,l})_{,k} = 0$ ja Navier'-Stokesi võrrandid (7.83) saavad kuju

$$\rho\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l}v_l\right) = \rho f_k - p_{,k} + \mu v_{k,ll}. \tag{7.85}$$

Viimased võrrandid võib esitada ka nn. vektorkujul:

$$\rho\dot{\mathbf{v}} = \rho\mathbf{f} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v}. \tag{7.86}$$

Kui kasutada nn. klassikalist DRK tähistust (koordinaadid x, y, z, massijõud $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$, ja kiirus $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$) siis saavad Navier'-Stokesi võrrandid (7.85) kuju

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right), \\ \rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right), \\ \rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right). \end{cases} \tag{7.87}$$

7.9 Elastsuskonstantide eksperimentaalne määramine

7.9.1 Sissejuhatus

Klassikalises elastsusteoorias vaadeldakse homogeenseid isotroopseid lineaarselt elastseid kehasid ja kasutatakse kahte materjalikonstanti — nn. Lamé konstanti[10] — λ_e ja μ_e ning olekuvõrrandina üldistatud Hooke'i seadust

$$t_{kl} = \lambda_e \widetilde{e}_{mm}\delta_{kl} + 2\mu_e \widetilde{e}_{kl}. \tag{7.88}$$

Nende konstantide määramine on suhteliselt lihtne. On vaja sooritada vaid kaks eksperimenti — tõmme ja nihe. Mittelineaarse teooria olekuvõrrandid homogeensele isotroopsele materjalile omavad aga tunduvalt keerukamat kuju. Kokkusurutava materjali puhul näiteks

$$t_{kl} = b_{-1}\overset{-1}{c}_{kl} + b_0\delta_{kl} + b_1 c_{kl},$$

kus konstandid b_α sõltuvad deformatsiooonitensori invariantidest I, II ja III. Elastsuskonstantide määramine on siin tunduvalt keerulisem, sest keskkonna mittelineaarsuse tõttu ei saa kasutada superpositsiooni printsiipi. Koefitsendid

[10] Võib loomulikult kasutada ka tugevusõpetusest rohkem tuntud kahte konstanti — Youngi moodulit E ja nihkeelastsuskonstanti G.

b_α püütakse määrata läbi potentsiaali Σ. See lihtsustab küll asja, kuid kokkusurutavate materjalide puhul on praktiliste tulemuste saamine, vähemalt Eringeni andmeil, ülimalt keeruline. Alljärgnevalt vaatleme kokkusurumatuid materjale, mille olekuvõrrandid avalduvad kujul.

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + 2\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}}\overset{-1}{c}_{kl} - 2\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{II}}c_{kl}, \tag{7.89}$$

kus invariandid vastavad deformatsioonitensorile $\overset{-1}{c}_{kl}$, $\Sigma = \Sigma(\mathrm{I}, \mathrm{II})$ ja $\mathrm{III} = 1$. Kuna deformeerumata olekus $\mathrm{I} = \mathrm{II} = 3$, siis on leitud, et potentsiaali Σ võib esitada järgmise rea kujul

$$\Sigma = \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_{mn}(\mathrm{I} - 3)^m(\mathrm{II} - 3)^n, \tag{7.90}$$

kus α_{mn} on konstandid ja $\alpha_{00} = 0$. Kuna väikeste deformatsioonide puhul on suurused $\mathrm{I} - 3$ ja $\mathrm{II} - 3$ väikesed, siis piirdutakse reaga

$$\Sigma = \alpha_{10}(\mathrm{I} - 3) + \alpha_{01}(\mathrm{II} - 3). \tag{7.91}$$

Kummilaadsete materjalide puhul kasutatakse potentsiaali

$$\Sigma = \alpha_{10}(\mathrm{I} - 3). \tag{7.92}$$

Selliseid materjale võiks eesti keeles nimetada (inglise keele eeskujul) *uus-Hooke'i materjalideks* või *neo-Hooke'i materjalideks*[11]. Kui (7.92) ei rahulda siis kasutatakse ka potentsiaali

$$\Sigma = \alpha_{10}(\mathrm{I} - 3) + f(\mathrm{II} - 3), \tag{7.93}$$

kus f sõltub vaid argumendist II.

Järgnevalt esitatakse ülevaade mõningatest eksperimentidest, mis algselt on teostatud Rivlini ja Sandersi poolt. Nimetatud teadlased korraldasid terve rea eksperimente „kummist lehega", kus tekitati selliseid homogeenseid deformatsioone, kus üks invariantidest I või II omas fikseeritud väärtust. Eksperimentideseeria tulemusena saadi olekuparameetrite $\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{I}}$ ja $\frac{\partial\Sigma}{\partial\mathrm{II}}$ ning invariantide I ja II vahelised sõltuvused. Nii suurte kui väikeste deformatsioonide puhul ilmnes eksperimentaalseid ebatäpsusi, näiteks kui invariandid I ja II olid viiest väiksemad, muutusid tulemused väga tundlikuks eksperimendi vigade suhtes. Olekuvõrrandis (7.89) esinev tundmatu rõhk p määrati rajatingimustest.

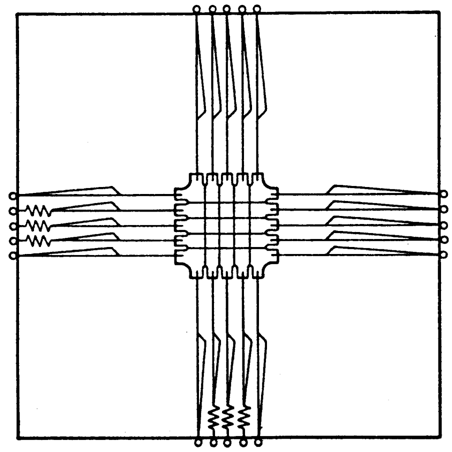
[11] I. k. *neo-Hookean materials*. Materjale, mille korral materjali käitumine on kirjeldatav Hooke'i seaduse abil nimetatakse inglise keeles *Hookean materials*.

7.9.2 Puhas homogeenne deformatsioon (kokkusurumatu lehe ühtlane laienemine)

Katse skeem on kujutatud joonisel 7.1. Ruudukujulist õhukest kummist lehte tõmmatakse risti külgedega. Pikenemiskoefitsentide λ_1 ja λ_2 arvutamiseks tuleb mõõta lehele joonistatud ruutude külgede pikkused deformeerunud olekus. Ruudu külgede pikkusühiku kohta mõjuvad jõud t_1 ja t_2 saadakse mõõtes vedrudes mõjuvad jõud.

Lähtume puhtale homogeensele deformatsioonile vastavatest olekuvõrranditest[12]

$$t_{\underline{k}\,\underline{k}} = -p + 2\lambda_k^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} - \frac{2}{\lambda_k^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}}. \qquad (7.94)$$



Joonis 7.1: Puhta homogeense deformatsiooni eksperiment — «kummist lehe» ühtlane tõmme ristuvates suundades.

[12] vt. A. Salupere, Elastsusteooria (tehnilise füüsika erialale) loengukonspekt. http://cens.ioc.ee/~salupere/lk/elastsus_2.pdf

Kuna pindadel $z = \pm H/2$ (kus H on lehe paksus) $t_{33} = 0$, siis saame viimasest avaldisest ellimineerida p —

$$\begin{cases} t_{11} = 2\left(\lambda_1^2 - \dfrac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\right)\left(\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \lambda_2^2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right), \\ t_{22} = 2\left(\lambda_2^2 - \dfrac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}\right)\left(\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \lambda_1^2 \dfrac{\partial \Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right), \\ t_{33} = t_{kl} = 0, \quad k \neq l \end{cases} \qquad (7.95)$$

Kokkusurumatuse tõttu $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. Seega invariandid

$$\mathrm{I} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}, \quad \mathrm{II} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2\lambda_2^2, \quad \mathrm{III} = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = 1. \qquad (7.96)$$

Lehe serva pikkusühiku kohta mõjuvad jõud t_1 ja t_2 avalduvad järgmiselt

$$t_1 = t_{11}\frac{H}{\lambda_1}, \qquad t_2 = t_{22}\frac{H}{\lambda_2}, \qquad (7.97)$$

kus nii serva pikkus kui lehe paksus H on mõõdetud deformeerumata olekus.

Avaldistest (7.95) ja (7.97) saame avaldada osatuletised $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}$ ja $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}$ sõltuvana jõududest t_1 ja t_2:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} &= \frac{1}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\left[\frac{\lambda_1^3(t_1/H)}{\lambda_1^2-\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}} - \frac{\lambda_2^3(t_2/H)}{\lambda_2^2-\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}}\right] \\ \frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}} &= \frac{1}{2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}\left[\frac{\lambda_1(t_1/H)}{\lambda_1^2-\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}} - \frac{\lambda_2(t_2/H)}{\lambda_2^2-\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}}\right] \end{aligned}\right. \tag{7.98}$$

Mõõtes nüüd t_1 ja t_2 etteantud λ_1 ja λ_2 puhul, saab leida vastavad $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}$ ja $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}$ väärtused. Avaldiste (7.96) kaudu saame omakorda vastavad I ja II väärtused ning meil on võimalik esitada $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}}$ ja $\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}$ kui invariantide I ja II funktsioone.

Eksperimendi käigus muudeti λ_1 ja λ_2 väärtusi nii, et emb-kumb, kas I või II oli jääv. Avaldise (7.96) põhjal

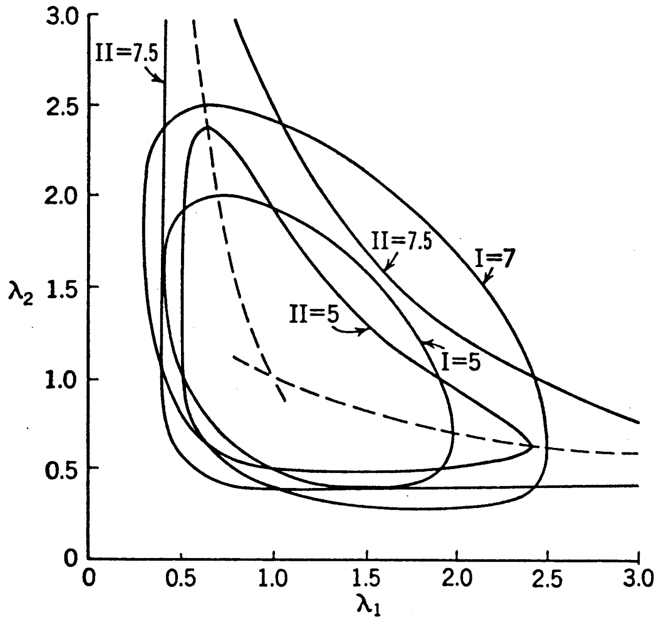
$$\left\{\begin{aligned} \lambda_2^2 &= \frac{1}{2}\left\{\left(\mathrm{I}-\lambda_1^2\right) \pm \sqrt{\left(\mathrm{I}-\lambda_1^2\right)^2 - 4\lambda_1^{-2}}\right\}, \quad \mathrm{I} = const. \\ \lambda_2^2 &= \frac{1}{2\lambda_1^2}\left\{\left(\mathrm{II}-\lambda_1^{-2}2\right) \pm \sqrt{\left(\mathrm{II}-\lambda_1^{-2}\right)^2 - 4\lambda_1^2}\right\}, \quad \mathrm{II} = const. \end{aligned}\right. \tag{7.99}$$

Seega pole pikenemiskoefitsente λ_1 ja λ_2 võimalik suvaliselt ette anda — fikseeritud I ja II puhul on tegu suletud kõveratega $\lambda_1 - \lambda_2$ tasandil (vt. joonis 7.2).

Punktiirjooned esitavad kõveraid $\lambda_2 = \lambda_1^{-2}$ ($t_2 = 0$) ja $\lambda_1 = \lambda_2^{-2}$ ($t_1 = 0$), mis vastavad tõmbele servade sihis.

Tehtud eksperimendid näitasid, et

- $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}$ on konstantne piirkonnas $5 \leq \mathrm{I} < 12$ ja $5 \leq \mathrm{II} \leq 30$ ning $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ on vaid II funktsioon;
- suhe $(\partial\Sigma/\partial\mathrm{II})/(\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}) \approx 1/8$ invariandi II väikeste väärtuste jaoks ning kahanes kiiresti suuremate puhul;
- avaldist (7.93) võib kasutada siseenergia Σ ja invariantide vahelise sõltuvuse aproksimeerimiseks (mõistlikes piires).



Joonis 7.2: Pikenemiskoefitsentide λ_1 ja λ_2 vaheline sõltuvus invariantide I ja II erinevate väärtuste puhul.

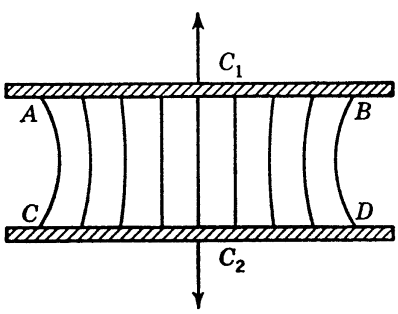
7.9.3 Puhas nihe

Puhas nihe[13] on selline homogeenne deformatsioon, mille puhul üks pikenemiskoefitsentidest, näiteks λ_2, hoitakse konstantne ja teisi kahte muudetakse. Valemite $(7.95)_1$ ja (7.97) põhjal

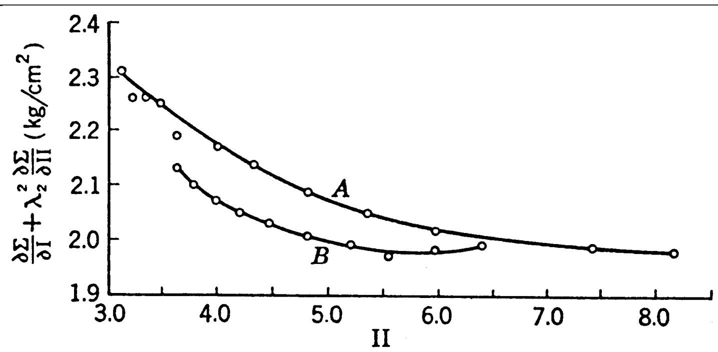
$$t_1 = 2H\left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3\lambda_2^2}\right)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \lambda_2^2\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right). \qquad (7.100)$$

Hoides nüüd $\lambda_2 = const.$ ja mõõtes t_1 erinevate λ_1 puhul saame joonistada suuruse $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + \lambda_2^2\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ sõltuvana teisest invariandist II. Kuna suurusel $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}$ leiti olema konstantne väärtus $5 \leq \mathrm{I} \leq 12$ ja $5 \leq \mathrm{II} \leq 30$ puhul, siis saame esitada ka $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ ja II vahelise sõltuvuse. Joonis 7.3 kirjeldab vaadeldavat eksperimenti. Kitsas õhuke kummiriba on kinnitatud klambrite C_1 ja C_2 vahele. Kui rakendada risti klambritega jõud t_1 (mõõdetunan pikkusühiku kohta) siis tekib joonisel kujutatud deformatsioon. Riba keskosa deformatsioon on aproksimeeritav puhta nihke kaudu. Joonisel 7.4 esitab kõver A katsetulemusi $\lambda_2 = 1$ jaoks ja kõver B $\lambda_2 = 0,776$ jaoks. Eelmisena vaadeldud eksperimendis tuvastati, et $(\partial\Sigma/\partial\mathrm{II})/(\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}) = 1/8$ kui $\mathrm{II} = 5$. $\lambda_2 = 1$ puhul saab nüüd

[13] I. k. *Pure shear*



Joonis 7.3: Puhta nihke eksperiment.



Joonis 7.4: Suurus $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + \lambda_2^2\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ sõltuvana invariandist II. Kõver A vastab puhtale nihkele ($\lambda_2 = 1$) ja kõver B nihkele koos tõmbega ($\lambda_2 = 0,776$).

joniselt 7.4 määrata suuruse $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + \partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ väärtuse ($\lambda_2 = 1$!). Edasi saab leida, et $\mathrm{II} = 5$ puhul $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} = 1,84$ kg/cm^2 ja $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II} = 0,23$ kg/cm^2. Eelmise eksperimendi põhjal eeldatakse, et $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} = 1,84$ kg/cm^2 $= const.$ ja $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ sõltub vaid invariandist II. Seega saab määrata $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ väärtused suvalise II väärtuse jaoks. Kõver B joonisel 7.4 esitab eksperimendi tulemusi $\lambda_2 = 0,776$ jaoks. Need tulemused lähevad hästi kokku tulemustega, mis saadakse avaldisest $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}+0,776^2\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$, kui suurused $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}$ ja $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ võtta eksperimendist, kus $\lambda_2 = 1$.

7.9.4 Tõmme

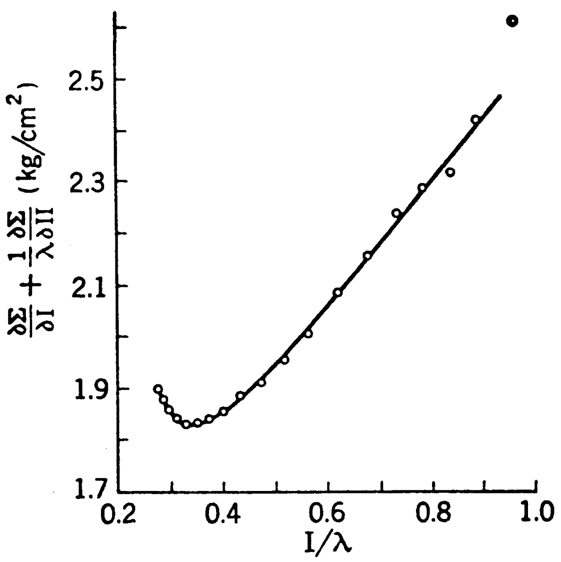
Tõmbe[14] puhul $t_{22} = t_{33} = 0$. Seega võttes avaldises $(7.95)_2$ $t_{22} = 0$ saame $\lambda_1 = \lambda_2^{-2} \overset{\text{tähist}}{=} \lambda$. Avaldis $(7.95)_1$ ja invariandid saavad nüüd kuju

$$t_{11} = 2\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right), \quad \mathrm{I} = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}, \quad \mathrm{II} = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2}. \tag{7.101}$$

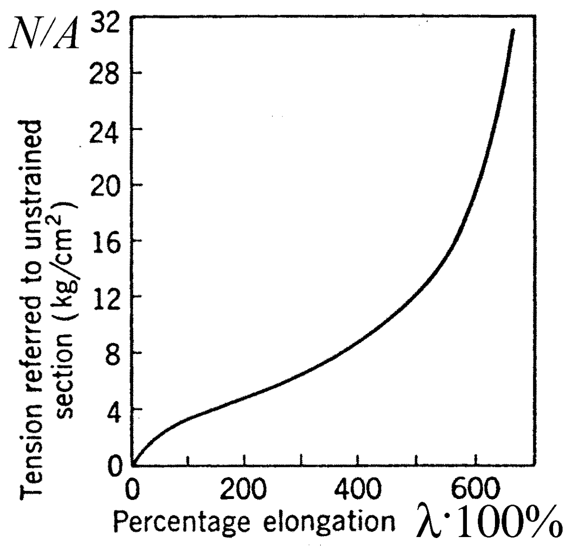
Katsekehaks on siin ühtlase ristlõikega «kummikang». Rakendatav pikijõud $N = At_{11}/\lambda$ (A — ristlõike algpindala). Seega mõõtes jõu N iga λ jaoks saame arvutada $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + 1/\lambda \cdot \partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$. Tulemused on esitatud joonisel 7.5 (NB! horisontaalteljel on $1/\lambda$). Kui kasutati eelmistes eksperimentides saadud suuruste $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I}$ ja $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ väärtusi, siis leiti, et avaldise $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + 1/\lambda \cdot \partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ väärtus ühtis väga hästi eksperimendi tulemustega.

Joonisel 7.6 on esitatud tõmbejõud jagatuna algpindalaga sõltuvana pikenemiskoefitsendist λ.

[14] I. k. *Simple extention*



Joonis 7.5: Suuruste $1/\lambda$ ja $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + 1/\lambda \cdot \partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ vaheline sõltuvus.

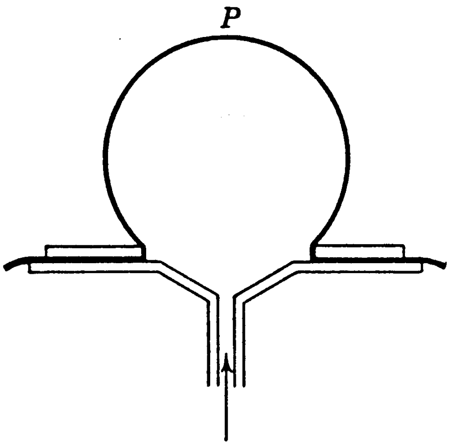


Joonis 7.6: Tõmbejõu sõltuvus pikenemiskoefitsendist

7.9.5 Ühtlane kahedimensionaalne tõmme

Tähistame

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \lambda_3 = 1/\lambda^2 = \lambda', \text{ ehk } \lambda^2 = 1/\lambda'. \tag{7.102}$$

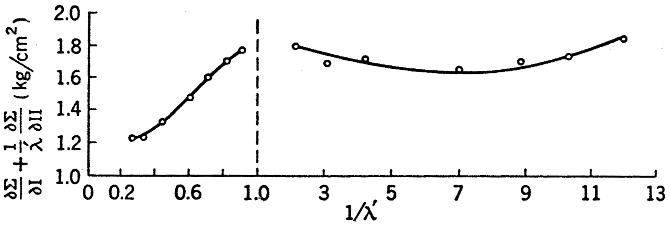


Joonis 7.7: Ühtlane kahedimensionaalne tõmme

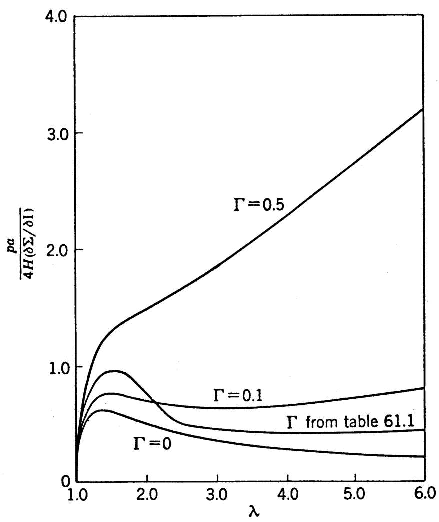
Tabel 1

$\lambda^2 \equiv 1/\lambda'$	II	$\frac{\partial\Sigma/\partial \mathrm{II}}{\partial\Sigma/\partial \mathrm{I}}$
0,5	4,25	0,16
0,6	3,69	0,26
0,7	3,35	0,33
0,8	3,14	0,39
3	9,67	0,12
5	25,4	0,06
7	49,3	0,04
9	81,2	0,03
11	121	0,035

Joonisel 7.7 kujutatud katse puhul puhutakse servadest kinnitatud kummikile alla õhku ja saavutatakse meid huvitav deformatsioon vaadeldava katsekeha keskosas. Tabelis 1 on esitatud $\partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ ja II vaheline sõltuvus, eeldades, et



Joonis 7.8: Ühtlane kahedimensionaalne tõmme — suuruste$\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + 1/\lambda' \cdot \partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ ja $1/\lambda'$ vaheline sõltuvus.



Joonis 7.9: Ühtlane kahedimensionaalne tõmme — suuruste p ja λ vaheline sõltuvus.

$\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} = const$. Joonis 7.8 esitab suuruste $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + 1/\lambda' \cdot \partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$ ja $1/\lambda'$ vahelist sõltuvust (NB! kohal $1/\lambda' = 1$ toimub skaala muutus).

Rõhk p keras ja tõmme T pikkusühiku kohta deformeeritud kiles (punktis P) on seotud valemiga

$$p = \frac{2T}{r}, \tag{7.103}$$

kus r on kõverusraadius punktis P. Kuna deformeeritud olekus on kile paksus H/λ^2, siis saame valemitest (7.95), (7.102) ja (7.103), et

$$p = \frac{2Ht_{11}}{r\lambda^2} = \frac{4H}{r}\left(1 - \frac{1}{\lambda^6}\right)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{I}} + \lambda^2\frac{\partial\Sigma}{\partial \mathrm{II}}\right). \tag{7.104}$$

Joonise 7.8 ja tabeli 1 koostamisel ongi kasutatud valemit (7.104), st. mõõdetakse p ja r iga λ jaoks ning leitakse suurus $\partial\Sigma/\partial\mathrm{I} + 1/\lambda' \cdot \partial\Sigma/\partial\mathrm{II}$. Joonis 7.9 esitab rõhu p ja pikenemise λ vahelisi seoseid erinevate $\Gamma = (\partial\Sigma/\partial\mathrm{II})/(\partial\Sigma/\partial\mathrm{I})$ väärtuste jaoks (a — sfäärilise «õhupalli» algraadius.)

Näide. Õhupalli täispuhumisel on kõige suuremat rõhku tarvis algul. Kui palli diameeter on saavutanud teatud väärtuse, siis palli suurendamiseks vajalik surve väheneb (võrdle joonis 7.9).

7.10 Üldistatud Hooke'i seadus[15]

Klassikalises (ehk lineaarses) elastsusteoorias (k.a. elementaarteooria) kehtib *üldistatud Hooke'i seadus:* deformatsioonitensori komponendid on lineaarsed funktsioonid pingetensori komponentidest. Kõige üldisemal juhul saab vastavad seosed esitada järgmisel kujul:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = D_{11}\sigma_x + D_{12}\sigma_y + D_{13}\sigma_z + D_{14}\tau_{xy} + D_{15}\tau_{yz} + D_{16}\tau_{zx} \\ \varepsilon_y = D_{21}\sigma_x + D_{22}\sigma_y + D_{23}\sigma_z + D_{24}\tau_{xy} + D_{25}\tau_{yz} + D_{26}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z = D_{31}\sigma_x + D_{32}\sigma_y + D_{33}\sigma_z + D_{34}\tau_{xy} + D_{35}\tau_{yz} + D_{36}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} = D_{41}\sigma_x + D_{42}\sigma_y + D_{43}\sigma_z + D_{44}\tau_{xy} + D_{45}\tau_{yz} + D_{46}\tau_{zx} \\ \gamma_{yz} = D_{51}\sigma_x + D_{52}\sigma_y + D_{53}\sigma_z + D_{54}\tau_{xy} + D_{55}\tau_{yz} + D_{56}\tau_{zx} \\ \gamma_{zx} = D_{61}\sigma_x + D_{62}\sigma_y + D_{63}\sigma_z + D_{64}\tau_{xy} + D_{65}\tau_{yz} + D_{66}\tau_{zx} \end{cases} \tag{7.105}$$

Viimased avaldised sisaldavad 36 *elastsuskonstanti* — seda on palju!

[15] Käesolev paragrahv on pärit minu loengukursuse „Elastsusteooria alused” kolmandast peatükist ning pole pandud kirja tensorkirjaviisis, vt. http://cens.ioc.ee/~salupere/loko.html

Kui eeldada, et keha on ideaalselt elastne (st. peale koormuse kõrvaldamist taastub algne kuju), homogeenne ja isotroopne, siis jääb järele vaid kaks sõltumatut elastsuskonstanti (Youngi moodul E ja Poissoni koefitsent ν), mis on määratavad väga lihtsate eksperimentide abil.

- Tõmme–surve (x-telje sihis).
  - Elastsuskonstant ehk Youngi moodul E: $\varepsilon_x = \sigma_x / E$
  - Poissoni koefitsent (Poissoni tegur) ν: $\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x$
- Nihe (xy tasandis).
  - Nihkeelastsusmoodul G: $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$, kus

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{7.106}$$

Kuna nihkeelastsusmoodul G on avaldatav E ja ν kaudu, siis ei saa teda pidada iseseisvaks elastsuskonstandiks.

Üldistatud Hooke'i seaduse tuletamiseks vaatleme lõpmata väikest isotroopset risttahukat, milles mõjuvad vaid normaalpinged $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Pinge $\sigma_x > 0$ põhjustab pikenemist x-telje sihis ja lühenemist y- ja z-telje sihis. Analoogiline toime on normaalpingetel $\sigma_y > 0$ ja $\sigma_z > 0$. Seega on summaarne suhteline pikenemine x-telje sihis ehk normaaldeformatsioon

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]. \tag{7.107}$$

Nihkepingete ja nihkedeformatsioonide vahelised seosed on määratud Hooke'i seadusega iga koordinaattasandi jaoks sõltumatult, s.t., τ_{xy} põhjustab vaid nihet γ_{xy}, jne. (vrd. normaaldeformatsioonidega).

Kokku saame kuus võrrandit, mis esitavad *üldistatud Hooke'i seadust* isotroopse ideaalselt elastse keha jaoks:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right], & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right], & \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right], & \gamma_{zx} = \dfrac{1}{G}\tau_{zx}. \end{cases} \tag{7.108}$$

Paljudes õpikutes[16] esitatakse valemitega (7.105) analoogilised pingete ja deformatsioonide vahelised seosed natuke teisel kujul. Esiteks tuuakse sisse tähistused

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_z, \quad \sigma_4 = \tau_{yz}, \quad \sigma_5 = \tau_{xz}, \quad \sigma_6 = \tau_{xy} \tag{7.109}$$

ja

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z, \quad \varepsilon_4 = 2\gamma_{yz}, \quad \varepsilon_5 = 2\gamma_{xz}, \quad \varepsilon_6 = 2\gamma_{xy}. \tag{7.110}$$

Seejärel esitatakse pinge sõltuvana deformatsioonist kujul

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \tag{7.111}$$

[16] Vt. näiteks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999 (esimene trükk), 2007 (teine trükk).

ja deformatsioon sõltuvana pingest kujul

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \tag{7.112}$$

Elastsuskoefitsentidest moodustatud maatriksit $[C_{ij}]$ nimetatakse *jäikusmaatriksiks*[17]. Maatriksit $[S_{ij}] = [C_{ij}]^{-1}$ võib eesti keeles seega nimetada *pöördjäikusmaatriksiks*[18] või *paindlikkusmaatriksiks* või *vetruvusmaatriksiks*.

[17] I. k. *stiffness matrix*

[18] I. k. *compliance matrix*. Tehnikasõnastikus on ingliskeelse sõna *compliance* eestikeelseks vasteks pakutud ka vetruvus.

Kasutades nüüd tähistusi (7.109) ja (7.110) saavad valemid (7.108) kuju

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix}. \tag{7.113}$$

7.10.1 Hooke'i seadus ruumdeformatsiooni jaoks

Vastavalt üldistatud Hooke'i seadusele (7.108)

$$\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}_{=\theta} = \frac{(1-2\nu)}{E}\underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{=I_1^\sigma} \tag{7.114}$$

Seega

$$\theta = \frac{(1-2\nu)I_1^\sigma}{E}. \tag{7.115}$$

Suurust $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ nimetatakse *ruumdeformatsiooniks* (vt. ka (**??**)) ja ta on ühtlasi ka deformatsioonitensori esimene invariant. Tuues sisse *ruumpaisumismooduli* K ja keskmise pinge σ_0,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \qquad \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1^\sigma}{3}, \tag{7.116}$$

saame lineaarse seose keskmise pinge ja ruumdeformatsiooni vahel kujul

$$\sigma_0 = K\theta. \tag{7.117}$$

7.10.2 Pingete avaldamine deformatsioonide kaudu

Liidame avaldise $(7.108)_1$ paremale poolele ja lahutame avaldise $(7.108)_1$ paremast poolest suuruse $\frac{1}{E}\nu\sigma_x$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_x - \nu I_1^\sigma\right]. \tag{7.118}$$

Avaldades (7.115)-st invariandi $I_1^\sigma = E\theta/(1-2\nu)$, saame

$$\varepsilon_x = \frac{(1+\nu)\sigma_x}{E} - \frac{\nu\theta}{(1-2\nu)}, \quad \text{kust} \quad \sigma_x = \frac{E\nu\theta}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E\varepsilon_x}{1+\nu} \tag{7.119}$$

Tuues sisse *Lamé koefitsiendid*[19]

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \tag{7.120}$$

saame valemist $(7.119)_2$ $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x$.

[19] Alternatiivne lineaarse teooria elastsuskonstantide paar.

Leides analoogilised avaldised σ_y ja σ_z jaoks ning avaldades seostest (7.108) nihkepinged, olemegi saanud *Hooke'i seaduse alternatiivse kuju*

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{cases} \tag{7.121}$$

Kasutades viimaseid valemeid leiame seose pingetensori ja deformatsioonitensori esimese invariandi vahel

$$\underbrace{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}_{=I_1^\sigma} = 3\lambda\theta + 2\mu\underbrace{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}_{\theta}, \quad \text{kust} \quad I_1^\sigma = (3\lambda + 2\mu)\theta. \tag{7.122}$$

Kui tähistada keskmist normaaldeformatsiooni

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\theta}{3}, \tag{7.123}$$

siis saame seose keskmise pinge ja keskmise normaaldeformatsiooni vahel

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0. \tag{7.124}$$

7.10.3 Anisotroopsed kehad

Eelmistes alajaotustes vaatlesime isotroopseid materjale ning seal oli pingete ja deformatsioonide vaheliste seoste kirjeldamiseks vaja vaid kahte sõltumatut elastsuskoefitsenti. Anisotroopse keha puhul on elastsuskonstantide arv loomulikult suurem. Kuna anisotroopseid materjale on mitut liiki, siis tuleb vajalik elastsuskonstantide arv määrata iga liigi jaoks eraldi.

Ortotroopsed materjalid, näiteks vineer, on üks sagedamini esinevaid anisotroopse materjali liike. Sellisest materjalist kehade jaoks on võimalik määrata 3 omavahel ristuvat telge (peasuunada), mille sihis rakendatud normaalpinged ei põhjusta telgedevaheliste nurkade muutumist. Ortotroopse materjali elastsed omadused ei muutu telgede pööramisel 180° võrra, kuid muutuvad iga teistsuguse pöörde korral. Ortotroopse materjali iseloomustamiseks on vaja üheksat elastsuskonstanti. Valemid (7.112) saavad selliste materjalide korral kuju

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0\\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix}, \tag{7.125}$$

kus

$$\begin{aligned} &S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{33} = \frac{1}{E_3},\\ &S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2},\\ &S_{55} = \frac{1}{G_{23}}, \quad S_{44} = \frac{1}{G_{13}}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \tag{7.126}$$

Konstandid E_1, E_2, E_3, ν_{12}, ν_{13}, ν_{23}, G_{12}, G_{13} ja G_{23} on vastavalt Youngi moodulid, Poissoni tegurid ja nihkeelastsusmoodulid koordinaattelgedega määratud sihtides[20].

[20] Tihti on koordanaatteljed valitud peasuundadega $1, 2, 3$ määratud sihtides. Vt. lisaks J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates, Philadelphia, Taylor & Francis, 1999 (esimene trükk), 2007 (teine trükk). §1.4.6