Lahendite loendamine ja BDD

Mati Tombak

Kava

1. Tähistused ja definitsioonid.
2. Ortogonaalne DNF.
3. Algoritmid ortogonaliseerimiseks.
4. Spekulatsioonid.

n-muutuja Boole'i funktsioon on kujutus:

$$f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$$

Vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on funktsiooni $f(x_1, \ldots, x_n)$ lahend (kehtestav väärtustus), kui $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$.
Tähistame $\#f$-ga funktsiooni f lahendite arvu.
Funktsiooniga $f(x_1, \ldots, x_n)$ duaalseks funktsiooniks nimetame funktsiooni

$$dual f = \neg f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$$

Fakt: $\#f = 2^n - \#dual f$, kus n on funktsiooni f muutujate arv.

Esitusviisid:

- Tõetabel
- Otsustusdiagramm (BDD)
- Boole'i valem.
- Disjunktiivne normaalkuju (DNF)
- Konjunktiivne normaalkuju (CNF)

Tõetabel

Funktsiooni $f(x_1, \ldots, x_n)$ tõetabel on bittstring

$$f_0, \ldots, f_{2^n-1},$$

kus

$$f_i = f(i);$$

funktsiooni f argument paremas pooles on indeksi i kahendesitus.

DNF

$$A = \bigvee_{i=1}^{p} C_i \qquad (1 \leq p \leq 3^n)$$

kus

$$C_i = \bigwedge_{j=1}^{k_i} a_{ij} \qquad (1 \leq k_i \leq n)$$

on konjunktid ja

$$a_{ij} \in \{x_l, \bar{x}_l : 1 \leq l \leq n\}$$

on literaalid. Lausemuutujat x_l nimetame literaali a_{ij} muutujaks ja tähistame ($x_l = \mathbf{var}(a_{ij})$). Eeldame, et kõik konjunktid valemis A on erinevad ja igas konjunktis on kõik lausemuutujad erinevad.

CNF

$$A = \bigwedge_{i=1}^{p} D_i \qquad (1 \leq p \leq 3^n)$$

kus

$$D_i = \bigvee_{j=1}^{k_i} a_{ij} \qquad (1 \leq k_i \leq n)$$

on disjunktid ja

$$a_{ij} \in \{x_l, \bar{x}_l : 1 \leq l \leq n\}$$

on literaalid. Lausemuutujat x_l nimetame literaali a_{ij} muutujaks ja tähistame ($x_l = \mathbf{var}(a_{ij})$). Eeldame, et kõik disjunktid valemis A on erinevad ja igas disjunktis on kõik lausemuutujad erinevad.

Mõnes kontekstis on mugavam vaadelda DNF-i ja CNF-i kui literaalide hulkade hulka. Sõltuvalt vajadusest mõistame seda kui disjunktsiooni konjunktsioonidest (DNF) või konjunktsiooni disjunktsioonidest (DNF).
Fakt: Vastavad funktsioonid on teineteisega duaalsed.
Seetõttu võime lahendite loendamisel piirduda DNF-i vaatlemisega.

Definitsioon. DNF on ortogonaalne, kui suvaline väärtustus muudab tõeseks ülimalt ühe konjunkti.

Fakt. DNF on ortogonaalne parajasti siis, kui suvalised kaks konjunkti sisaldavad kontraarset literaalipaari.

Fakt Kui konjunkt C koosneb k literaalist $(0 \leq k \leq n)$, siis $\#C = 2^{(n-k)}$

Olgu DNF

$$A = \{\{a_{1,1}, \ldots, a_{1,k_1}\}, \ldots, \{a_{p,1}, \ldots, a_{p,k_p}\}\}$$

ortogonaalne DNF. Siis

$$\#A = \sum_{i=1}^{p} 2^{n-k_i}$$

Algoritm 1: *ortogonalize*$(A \vee B)$.

Olgu A ja B kaks mitteortogonaalset konjunkti.

$$A = a_1 \& \ldots \& a_k \& b_1 \& \ldots \& b_l,$$

$$B = a_1 \& \ldots \& a_k \& c_1 \& \ldots \& c_m,$$

kus $\{var(b_1), \ldots, var(b_l)\} \cap \{var(c_1), \ldots, var(c_m)\} = \emptyset$. Olgu $m > l$.

if $l = 0$ **then** *ortogonalize*$(A \vee B) = A$

else *ortogonalize*$(A \vee B) = A \vee B_1 \vee \ldots \vee B_l$, kus

$$\begin{aligned} B_1 &= B \& \bar{b}_1, \\ B_2 &= B \& b_1 \& \bar{b}_2 \\ B_3 &= B \& b_1 \& b_2 \& \bar{b}_3 \\ \ldots & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_l &= B \& b_1 \& b_2 \& \ldots \& \bar{b}_l. \end{aligned}$$

Teoreem. Algoritmi *ortogonalize*$(A \vee B)$ tulemuseks on valemiga $(A \vee B)$ ekvivalentne ortogonaalne DNF.

Algorithm $(DPLL)$.

function $DPLL(F$: **set of clauses**) : **boolean**

begin $DPLL$

S1: **if** $F = \emptyset$ **then return**(1);

S2: **if** $\square \in F$ **then return**(0);

S3: Kehtestatavust säilitavad võtted rekursioonipuu vähendamiseks.
S4: Vali literaal a; **return** $(DPLL(F_a) \vee DPLL(F_{\overline{a}}))$.

end $DPLL$

Teoreem. DPLL(F)=1 parajasti siis, kui F on kehtestatav.

Algorithm $(DPLLO)$.

function $DPLLO(F$: **set of clauses**, C: **set of literals**) : **set of sets of literals**

begin $DPLLO$

S1: **if** $F = \emptyset$ **then return**(C);

S2: **if** $\square \in F$ **then return**$(\emptyset)$;

S3: Lahendeid säilitavad võtted rekursioonipuu vähendamiseks.

S4: Vali muutuja x;
return $(DPLL(F_x, C \cup \{x\}) \cup DPLL(F_{\overline{x}}, C \cup \{\overline{x}\}))$.

end $DPLLO$

Teoreem. DPLLO$(F, \emptyset)$ on ortogonaalne DNF, mis on ekvivalentne valemiga F.

Algorithm #SAT

function $\#DP(F$: **set of clauses**, l: **integer**) : **integer**

begin $\#DP$

1. **if** $F = \emptyset$ **then return**(2^l);

2. **if** $\square \in F$ **then return**(0);

3. **if** F contains unit clause, say x, **then return** $(\#DP(F_x, l-1))$;

4. Choose a literal x; **return** $(\#DP(F_x, l-1) + \#DP(F_{\bar{x}}, l-1))$.

end $\#DP$

Teoreem. $\#DP(F, n)$ on funktsiooni F lahendite arv.