Calcoli di Membrane

Aspetti logici spazio-temporali

Giorgio Bacci, Marino Miculan

Università di Udine

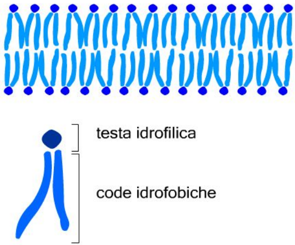
4 Ottobre 2005

Introduzione

Le proprietà che vogliamo descrivere sono:

- "da qualche parte nel sistema c'è un virus"
- "il sistema è resistente ad un attacco virale"
- "prima o poi questa cellula si duplicherà per meiosi"
- "If a macrophage is exposed to target cells that have been evenly coated with antibody, it ingests the coated cells." [1, Cap.6, pag.335]
- "The virus escapes from the endosome" [1, Cap.8, pag.469]

Le membrane biologiche: il doppio strato lipidico



Doppio strato lipidico

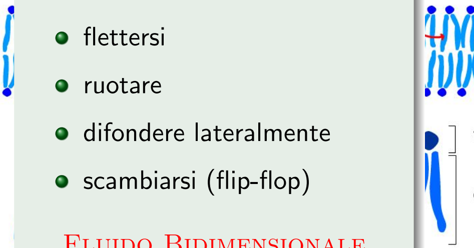
È la base universale della struttura delle membrane cellulari

I lipidi di membrana possono

- flettersi
- ruotare
- difondere lateralmente
- scambiarsi (flip-flop)

FLUIDO BIDIMENSIONALE

Le proteine possono risiedere sulla membrana



Un calcolo di membrane biologiche: il Brane Calcolo[2]

Sintassi di base

$P, Q ::=$		PROCESSI
	$\diamond$	(vuoto)
	$\sigma (\!| P |\!)$	(locazione)
	$P \circ Q$	(composizione)
	$!P$	(replicazione)
$\sigma, \tau ::=$		MEMBRANE
	$\mathbf{0}$	(void)
	$\sigma \vert \tau$	(composizione)
	$\mathrm{a}.\sigma$	(prefisso)
	$!\sigma$	(replicazione)
$\mathrm{a}, \mathrm{b} ::=$		AZIONI
	$\circlearrowright_n \mid \circlearrowright_n^{\perp}(\sigma)$	(phago – co-phago)
	$\circlearrowleft_n \mid \circlearrowleft_n^{\perp}$	(exo – co-exo)
	$\circledcirc(\sigma)$	(pino)

Un calcolo di membrane biologiche: il Brane Calcolo

Congruenze Strutturali

$$P \circ Q \equiv Q \circ P \qquad \sigma|\tau \equiv \tau|\sigma$$
$$P \circ (Q \circ R) \equiv (P \circ Q) \circ R \qquad \sigma|(\tau|\rho) \equiv (\sigma|\tau)|\rho$$
$$P \circ \diamond \equiv P \qquad \sigma|\mathbf{0} \equiv \sigma$$
$$!\diamond \equiv \diamond \qquad !\mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$$

$$!(P \circ Q) \equiv !P \circ !Q \qquad !(\sigma|\tau) \equiv !\sigma|!\tau$$
$$!!P \equiv !P \qquad !!\sigma \equiv !\sigma$$
$$!P \equiv P \circ !P \qquad !\sigma \equiv \sigma|!\sigma$$

$$\mathbf{0}(\!|\diamond|\!) \equiv \diamond$$

$$\frac{P \equiv Q}{P \circ R \equiv Q \circ R} \qquad \frac{\sigma \equiv \tau}{\sigma|\rho \equiv \tau|\rho}$$

$$\frac{P \equiv Q}{!P \equiv !Q} \qquad \frac{\sigma \equiv \tau}{!\sigma \equiv !\tau}$$

$$\frac{P \equiv Q \quad \sigma \equiv \tau}{\sigma(\!|P|\!) \equiv \tau(\!|Q|\!)} \qquad \frac{\mathrm{a} \equiv \mathrm{b} \quad \sigma \equiv \tau}{\mathrm{a}.\sigma \equiv \mathrm{b}.\tau}$$

Un calcolo di membrane biologiche: il Brane Calcolo

$$\circlearrowright_n \equiv \circlearrowright_n \qquad \frac{\sigma \equiv \tau}{\circlearrowright_n^{\perp}(\sigma) \equiv \circlearrowright_n^{\perp}(\tau)}$$

$$\circlearrowleft_n \equiv \circlearrowleft_n \qquad \circlearrowleft_n^{\perp} \equiv \circlearrowleft_n^{\perp}$$

$$\frac{\sigma \equiv \tau}{\circledcirc(\sigma) \equiv \circledcirc(\tau)}$$

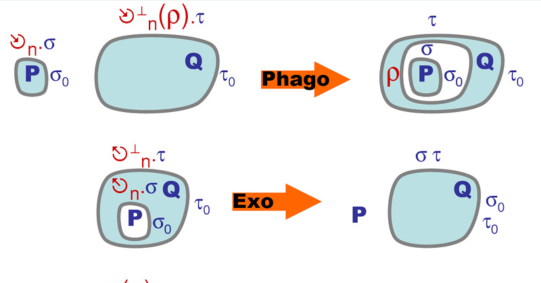
Un calcolo di membrane biologiche: il Brane Calcolo

Reazioni

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\sigma(\!|P|\!) \Rightarrow \sigma(\!|Q|\!)} \qquad \text{(React loc)}$$

$$\frac{P \Rightarrow Q}{P \circ R \Rightarrow Q \circ R} \qquad \text{(React comp)}$$

$$\frac{P \equiv P' \quad P' \Rightarrow Q' \quad Q' \equiv Q}{P \Rightarrow Q} \qquad \text{(React} \equiv\text{)}$$



Proprietà fondamentali

(1) $\sigma \equiv \tau \Rightarrow fn(\sigma) = fn(\tau)$
(2) $P \equiv Q \Rightarrow fn(P) = fn(Q)$
(3) $\sigma \mid \tau \equiv \mathbf{0} \Leftrightarrow \sigma \equiv \mathbf{0} \wedge \tau \equiv \mathbf{0}$
(4) $a.\sigma \equiv b.\tau \Leftrightarrow a \equiv b \wedge \sigma \equiv \tau$
(5) $P \circ Q \equiv \diamond \Leftrightarrow P \equiv \diamond \wedge Q \equiv \diamond$
(6) $\sigma\llparenthesis P \rrparenthesis \equiv \diamond \Leftrightarrow P \equiv \diamond \wedge \sigma \equiv \mathbf{0}$
(7) $\sigma\llparenthesis P \rrparenthesis \equiv Q \circ R \Leftrightarrow (Q \equiv \sigma\llparenthesis P \rrparenthesis \wedge R \equiv \diamond) \vee (R \equiv \sigma\llparenthesis P \rrparenthesis \wedge Q \equiv \diamond)$
(8) $\sigma\llparenthesis P \rrparenthesis \circ \tau\llparenthesis Q \rrparenthesis \equiv \sigma'\llparenthesis P' \rrparenthesis \circ \tau'\llparenthesis Q' \rrparenthesis \Leftrightarrow (\sigma \equiv \sigma' \wedge \tau \equiv \tau' \wedge P \equiv P' \wedge Q \equiv Q') \vee$
$(\sigma \equiv \tau' \wedge \tau \equiv \sigma' \wedge P \equiv Q' \wedge Q \equiv P')$
(9) $a \equiv b$ se e solo se vale una delle seguenti asserzioni:

- $a = \circlearrowright_n$ e $b = \circlearrowright_n$, per qualche nome n
- $a = \circlearrowright_n^\perp(\sigma)$, $b = \circlearrowright_n^\perp(\tau)$ e $\sigma \equiv \tau$ per qualche nome n
- $a = \circlearrowleft_n$ e $b = \circlearrowleft_n$, per qualche nome n
- $a = \circlearrowleft_n^\perp$ e $b = \circlearrowleft_n^\perp$, per qualche nome n
- $a = \circledcirc(\sigma)$, $b = \circledcirc(\tau)$ e $\sigma \equiv \tau$

Brane Logic

- Il Brane Calcolo è un calcolo per processi mobili (come l'Ambient Calcolo [4])
- Sarebbe interessante definire una logica [3][5] anche sul Brane Calcolo $\Rightarrow$ logica spazio-temporale
- Vogliamo descrivere la struttura spaziale di un processo con un livello di astrazione variabile
  - $\mathcal{M}(\!|\mathcal{N}(\!|\mathbf{0}|\!)|\!)$ *"qui e adesso c'è una membrana che soddisfa* $\mathcal{M}$ *con al suo interno una membrana che soddisfa* $\mathcal{N}$*"*
  - $\diamond\mathcal{M}(\!|\mathbf{0}|\!)$ *"da qualche parte c'è una membrana vuota che soddisfa* $\mathcal{M}$*"*

Problema

Le membrane sono programmabili $\Rightarrow$ logica sulle membrane

Le formule della logica

$\mathcal{A}, \mathcal{B} ::=$		Formule di Processo
	$\mathbf{T}$	(true)
	$\neg \mathcal{A}$	(negazione)
	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	(disgiunzione)
	$\diamond$	(vuoto)
	$\mathcal{M}(\!\lvert \mathcal{A} \rvert\!)$	(locazione)
	$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$	(composizione)
	$\forall x.\mathcal{A}$	(quantificazione universale sui nomi)
	$\Diamond \mathcal{A}$	(modalità qualche volta)
	$\diamond\!\!\!\!\!+ \mathcal{A}$	(modalità da qualche parte)
	$\mathcal{A} @ \mathcal{M}$	(aggiunto della locazione)
	$\mathcal{A} \triangleright \mathcal{B}$	(aggiunto della composizione)

Le formule della logica

$\mathcal{M}, \mathcal{N} ::=$	FORMULE DI MEMBRANA
$\mathbf{T}$	(true)
$\neg\mathcal{M}$	(negazione)
$\mathcal{M} \vee \mathcal{N}$	(disgiunzione)
$\mathbf{0}$	(void)
$\mathcal{M} \vert \mathcal{N}$	(composizione)
$\langle\alpha\rangle\mathcal{M}$	(modalità qualche volta)
$\mathcal{M} \blacktriangleright \mathcal{N}$	(aggiunto della composizione)

Le formule della logica

$\alpha, \beta ::=$	FORMULE DI AZIONE
$\circlearrowleft_\eta \mid \circlearrowleft^\perp_\eta(\mathcal{M})$	(phago)
$\circlearrowleft_\eta \mid \circlearrowleft^\perp_\eta$	(exo)
$\circledcirc(\mathcal{M})$	(pino)

Soddisfacibilità

Labelled Transition System (LTS)

$$\left\langle \Delta, \Theta, \left\{ \xrightarrow{\alpha} \mid \alpha \in \Theta \right\} \right\rangle$$

Relazione di transizione: $\xrightarrow{\alpha} \subseteq \Delta \times \Delta$

$$\frac{\mathsf{a} \models \alpha}{\mathsf{a}.\sigma \xrightarrow{\alpha} \sigma}\ (\mathsf{prefix}) \qquad \frac{\sigma \xrightarrow{\alpha} \sigma'}{\sigma|\tau \xrightarrow{\alpha} \sigma'|\tau}\ (\mathsf{par}) \qquad \frac{\sigma \equiv \sigma' \quad \sigma' \xrightarrow{\alpha} \tau' \quad \tau' \equiv \tau}{\sigma \xrightarrow{\alpha} \tau}\ (\mathsf{equiv})$$

Definiamo la relazione $\downarrow$ binaria sui processi come segue

$$P \downarrow P' \qquad \text{sse} \qquad \exists \sigma : \Delta, P'' : \Pi. \quad P \equiv \sigma (\!| P' |\!) \circ P''$$

$\downarrow^*$ è la chiusura riflessiva e transitiva di $\downarrow$

Soddisfacibilità

$$
\begin{array}{llcl}
\forall P{:}\Pi & P \models \mathbf{T} & & \\
\forall P{:}\Pi, \mathcal{A}{:}\Phi & P \models \neg\mathcal{A} & \triangleq & P \not\models \mathcal{A} \\
\forall P{:}\Pi, \mathcal{A}, \mathcal{B}{:}\Phi & P \models \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \triangleq & P \models \mathcal{A} \vee P \models \mathcal{B} \\
\forall P{:}\Pi & P \models \diamond & \triangleq & P \equiv \diamond \\
\forall P{:}\Pi, \mathcal{A}{:}\Phi, \mathcal{M}{:}\Omega & P \models \mathcal{M}(\!|\mathcal{A}|\!) & \triangleq & \exists P'{:}\Pi, \sigma{:}\Delta.\ P \equiv \sigma(\!|P'|\!) \wedge P' \models \\
 & & & \mathcal{A} \wedge \sigma \models \mathcal{M} \\
\forall P{:}\Pi, \mathcal{A}, \mathcal{B}{:}\Phi & P \models \mathcal{A} \circ \mathcal{B} & \triangleq & \exists P', P''{:}\Pi.\ P \equiv P' \circ P'' \wedge P' \models \\
 & & & \mathcal{A} \wedge P'' \models \mathcal{B} \\
\forall P{:}\Pi, \mathcal{A}{:}\Phi, x{:}\vartheta & P \models \forall x.\mathcal{A} & \triangleq & \forall \mathrm{m}{:}\Lambda.\ P \models \mathcal{A}\{x \leftarrow \mathrm{m}\} \\
\forall P{:}\Pi, \mathcal{A}{:}\Phi & P \models \Diamond\mathcal{A} & \triangleq & \exists P'{:}\Pi.\ P \Rightarrow^{*} P' \wedge P' \models \mathcal{A} \\
\forall P{:}\Pi, \mathcal{A}{:}\Phi & P \models ✧\mathcal{A} & \triangleq & \exists P'{:}\Pi.\ P \downarrow^{*} P' \wedge P' \models \mathcal{A} \\
\forall P{:}\Pi, \mathcal{A}{:}\Phi, \mathcal{M}{:}\Omega & P \models \mathcal{A}@\mathcal{M} & \triangleq & \forall \sigma{:}\Delta.\ \sigma \models \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\!|P|\!) \models \mathcal{A} \\
\forall P{:}\Pi, \mathcal{A}, \mathcal{B}{:}\Phi & P \models \mathcal{A} \triangleright \mathcal{B} & \triangleq & \forall P'{:}\Pi.\ P' \models \mathcal{A} \Rightarrow P \circ P' \models \mathcal{B}
\end{array}
$$

Soddisfacibilità

$$
\begin{array}{llcl}
\forall\sigma{:}\Delta & \sigma \vDash \mathbf{T} & & \\
\forall\sigma{:}\Delta, \mathcal{M}{:}\Omega & \sigma \vDash \neg\mathcal{M} & \triangleq & \sigma \nvDash \mathcal{M} \\
\forall\sigma{:}\Delta, \mathcal{M}, \mathcal{N}{:}\Omega & \sigma \vDash \mathcal{M} \vee \mathcal{N} & \triangleq & \sigma \vDash \mathcal{M} \vee \sigma \vDash \mathcal{M} \\
\forall\sigma{:}\Delta & \sigma \vDash \mathbf{0} & \triangleq & \sigma \equiv \mathbf{0} \\
\forall\sigma{:}\Delta, \mathcal{N}, \mathcal{M}{:}\Omega & P \vDash \mathcal{M}|\mathcal{N} & \triangleq & \exists\sigma', \sigma''{:}\Delta.\ \sigma \equiv \sigma'|\sigma'' \wedge \sigma' \vDash \\
& & & \mathcal{M} \wedge \sigma'' \vDash \mathcal{N} \\
\forall\sigma{:}\Delta, \alpha{:}\Theta & \sigma \vDash \langle\alpha\rangle\mathcal{M} & \triangleq & \exists\sigma'{:}\Delta.\ \sigma \xrightarrow{\alpha} \sigma' \wedge \sigma' \vDash \mathcal{M} \\
\forall\sigma{:}\Delta, \mathcal{M}, \mathcal{N}{:}\Omega & \sigma \vDash \mathcal{M} \blacktriangleright \mathcal{N} & \triangleq & \forall\sigma'{:}\Delta.\ \sigma' \vDash \mathcal{M} \Rightarrow \sigma|\sigma' \vDash \mathcal{N}
\end{array}
$$

Soddisfacibilità

$$
\begin{array}{llcl}
\forall a{:}\Gamma, n{:}\Lambda & a \models \circlearrowleft_{n} & \triangleq & a = \circlearrowleft_{n} \\
\forall a{:}\Gamma, n{:}\Lambda, \mathcal{M}{:}\Omega & a \models \circlearrowleft_{n}^{\perp}(\mathcal{M}) & \triangleq & \exists \sigma{:}\Delta.\ a = \circlearrowleft_{n}^{\perp}(\sigma) \wedge \sigma \models \mathcal{M} \\
\forall a{:}\Gamma, n{:}\Lambda & a \models \circlearrowright_{n} & \triangleq & a = \circlearrowright_{n} \\
\forall a{:}\Gamma, n{:}\Lambda & a \models \circlearrowright_{n}^{\perp} & \triangleq & a = \circlearrowright_{n}^{\perp} \\
\forall a{:}\Gamma, \mathcal{M}{:}\Omega & a \models \circledcirc(\mathcal{M}) & \triangleq & \exists \sigma{:}\Delta.\ a = \circledcirc(\sigma) \wedge \sigma \models \mathcal{M}
\end{array}
$$

Connettivi derivati

Formule di processo

$\mathbf{F}$	$\triangleq$	$\neg\mathbf{T}$	(false)
$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\triangleq$	$\neg(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$	(congiunzione)
$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\triangleq$	$\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	(implicazione)
$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	$\triangleq$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$	(equivalenza logica)
$\mathcal{A} \phi \mathcal{B}$	$\triangleq$	$\neg(\neg\mathcal{A} \circ \neg\mathcal{B})$	(decomposizione)
$\mathcal{A}^{\forall}$	$\triangleq$	$\mathcal{A} \phi \mathbf{F}$	(ogni componente soddisfa $\mathcal{A}$)
$\mathcal{A}^{\exists}$	$\triangleq$	$\mathcal{A} \circ \mathbf{T}$	(qualche componente soddisfa $\mathcal{A}$)
$\exists x.\mathcal{A}$	$\triangleq$	$\neg\forall x.\neg\mathcal{A}$	(quantificatore esistenziale)
$\Box\mathcal{A}$	$\triangleq$	$\neg\Diamond\neg\mathcal{A}$	(modalità per sempre)
$\text{⌑}\mathcal{A}$	$\triangleq$	$\neg\text{✧}\neg\mathcal{A}$	(modalità dovunque)
$\mathcal{A} \propto \mathcal{B}$	$\triangleq$	$\neg(\mathcal{B} \triangleright \neg\mathcal{A})$	(fusione)
$\mathcal{A} \circ\!\!\Rightarrow \mathcal{B}$	$\triangleq$	$\neg(\mathcal{A} \circ \neg\mathcal{B})$	(aggiunto della fusione)

Connettivi derivati

Formule di Membrana

$\mathbf{F}$	$\triangleq$	$\neg\mathbf{T}$	(false)
$\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}$	$\triangleq$	$\neg(\neg\mathcal{M} \vee \neg\mathcal{N})$	(congiunzione)
$\mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{N}$	$\triangleq$	$\neg\mathcal{M} \vee \mathcal{N}$	(implicazione)
$\mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{N}$	$\triangleq$	$(\mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{N}) \wedge (\mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M})$	(equivalenza logica)
$\mathcal{M} \parallel \mathcal{N}$	$\triangleq$	$\neg(\neg\mathcal{M} \vert \neg\mathcal{N})$	(decomposizione)
$\mathcal{M}^{\forall}$	$\triangleq$	$\mathcal{M} \parallel \mathbf{F}$	(ogni componente soddisfa $\mathcal{M}$
$\mathcal{M}^{\exists}$	$\triangleq$	$\mathcal{M} \vert \mathbf{T}$	(qualche componente soddisf
$[\mathrm{a}]\, \mathcal{M}$	$\triangleq$	$\neg\langle\mathrm{a}\rangle\neg\mathcal{M}$	(modalità per sempre)
$\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N}$	$\triangleq$	$\neg(\mathcal{N} \blacktriangleright \neg\mathcal{M})$	(fusione)
$\mathcal{M} \Mapsto \mathcal{N}$	$\triangleq$	$\neg(\mathcal{M} \vert \neg\mathcal{N})$	(aggiunto della fusione)

Esempi di formule

- $\langle \circledcirc(\mathbf{0}) \rangle \mathbf{T} \llparenthesis \mathbf{T} \rrparenthesis$ “ora la membrana è in grado di espletare una pinocitosi inglobando il fluido esterno entro una membrana inattiva”
- $\Box \mathcal{M} \llparenthesis \mathbf{T} \rrparenthesis$ “ci sarà sempre e solo una membrana che soddisfa $\mathcal{M}$ qui”
- $\text{¤} \neg (\mathcal{M} \llparenthesis \mathbf{T} \rrparenthesis^{\exists})$ “ora non c’è in nessun luogo una membrana che soddisfi $\mathcal{M}$”

Sistema di validità

Validità, Sequenti, Regole (per formule chiuse)

$\mathbf{vld}(\mathcal{A}) \triangleq \forall P{:}\Pi.\ P \vDash \mathcal{A}$	Validità per $\mathcal{A}$ (chiusa)
$\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \triangleq \mathbf{vld}(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	Sequente
$\mathcal{A} \dashv\vdash \mathcal{B} \triangleq \mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$	Doppio sequente
$\dfrac{\mathcal{A}_1 \vdash \mathcal{B}_1 \quad \cdots \quad \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}_n}{\mathcal{A}_0 \vdash \mathcal{B}_0} \triangleq \mathcal{A}_1 \vdash \mathcal{B}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}_n \Rightarrow \mathcal{A}_0 \vdash \mathcal{B}_0$	Regola di inferenza ($n \geq 0$)
$\dfrac{\mathcal{A}_1 \vdash \mathcal{B}_1 \quad \cdots \quad \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}_n}{\mathcal{A}_0 \dashv\vdash \mathcal{B}_0} \triangleq \mathcal{A}_1 \vdash \mathcal{B}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}_n \Rightarrow \mathcal{A}_0 \dashv\vdash \mathcal{B}_0$	Doppia conclusione
$\dfrac{\mathcal{A}_1 \vdash \mathcal{B}_1}{\overline{\mathcal{A}_2 \dashv\vdash \mathcal{B}_2}} \triangleq \dfrac{\mathcal{A}_1 \vdash \mathcal{B}_1}{\mathcal{A}_2 \dashv\vdash \mathcal{B}_2} \wedge \dfrac{\mathcal{A}_2 \vdash \mathcal{B}_2}{\mathcal{A}_1 \dashv\vdash \mathcal{B}_1}$	Doppia regola

Regole di Inferenza proposizionali

Regole proposizionali

$$
\begin{array}{lll}
\text{(A-L)} & \begin{array}{c} \mathcal{A} \wedge (\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) \vdash \mathcal{B} \\ \hline\hline (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \wedge \mathcal{D} \vdash \mathcal{B} \end{array} & \begin{array}{c} \mathcal{M} \wedge (\mathcal{J} \wedge \mathcal{K}) \vdash \mathcal{N} \\ \hline\hline (\mathcal{M} \wedge \mathcal{J}) \wedge \mathcal{K} \vdash \mathcal{N} \end{array} \\[2ex]
\text{(A-R)} & \begin{array}{c} \mathcal{A} \vdash (\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \vee \mathcal{B} \\ \hline\hline \mathcal{A} \vdash \mathcal{C} \vee (\mathcal{D} \vee \mathcal{B}) \end{array} & \begin{array}{c} \mathcal{M} \vdash (\mathcal{J} \vee \mathcal{K}) \vee \mathcal{N} \\ \hline\hline \mathcal{M} \vdash \mathcal{J} \vee (\mathcal{K} \vee \mathcal{N}) \end{array} \\[2ex]
\text{(X-L)} & \dfrac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \vdash \mathcal{B}}{\mathcal{C} \wedge \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}} & \dfrac{\mathcal{M} \wedge \mathcal{J} \vdash \mathcal{N}}{\mathcal{J} \wedge \mathcal{M} \vdash \mathcal{N}} \\[2ex]
\text{(X-R)} & \dfrac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{C} \vee \mathcal{B}}{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \vee \mathcal{C}} & \dfrac{\mathcal{M} \vdash \mathcal{J} \vee \mathcal{N}}{\mathcal{M} \vdash \mathcal{N} \vee \mathcal{J}} \\[2ex]
\text{(C-L)} & \dfrac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}}{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}} & \dfrac{\mathcal{M} \wedge \mathcal{M} \vdash \mathcal{N}}{\mathcal{M} \vdash \mathcal{N}} \\[2ex]
\text{(C-R)} & \dfrac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \vee \mathcal{B}}{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}} & \dfrac{\mathcal{M} \vdash \mathcal{N} \vee \mathcal{N}}{\mathcal{M} \vdash \mathcal{N}} \\[2ex]
\text{(W-L)} & \dfrac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \vdash \mathcal{B}} & \dfrac{\mathcal{M} \vdash \mathcal{N}}{\mathcal{M} \wedge \mathcal{J} \vdash \mathcal{N}}
\end{array}
$$

Regole di Inferenza proposizionali

Regole proposizionali (cont.)

(W-R)	$\dfrac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}}{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \vee \mathcal{C}}$	$\dfrac{\mathcal{M} \vdash \mathcal{N}}{\mathcal{M} \vdash \mathcal{N} \vee \mathcal{J}}$
(Id)	$\dfrac{}{\mathcal{A} \vdash \mathcal{A}}$	$\dfrac{}{\mathcal{M} \vdash \mathcal{M}}$
(Cut)	$\dfrac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{C} \vee \mathcal{B} \quad \mathcal{A}' \wedge \mathcal{C} \vdash \mathcal{B}'}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}' \vdash \mathcal{B} \vee \mathcal{B}'}$	$\dfrac{\mathcal{M} \vdash \mathcal{J} \vee \mathcal{N} \quad \mathcal{M}' \wedge \mathcal{J} \vdash \mathcal{N}'}{\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}' \vdash \mathcal{N} \vee \mathcal{N}'}$
(**T**)	$\dfrac{\mathcal{A} \wedge \mathbf{T} \vdash \mathcal{B}}{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}}$	$\dfrac{\mathcal{M} \wedge \mathbf{T} \vdash \mathcal{N}}{\mathcal{M} \vdash \mathcal{N}}$
(**F**)	$\dfrac{\mathcal{A} \vdash \mathbf{F} \vee \mathcal{B}}{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}}$	$\dfrac{\mathcal{M} \vdash \mathbf{F} \vee \mathcal{N}}{\mathcal{M} \vdash \mathcal{N}}$
($\neg$-L)	$\dfrac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{C} \vee \mathcal{B}}{\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{C} \vdash \mathcal{B}}$	$\dfrac{\mathcal{M} \vdash \mathcal{K} \vee \mathcal{N}}{\mathcal{M} \wedge \neg\mathcal{K} \vdash \mathcal{N}}$
($\neg$-R)	$\dfrac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \vdash \mathcal{B}}{\mathcal{A} \vdash \neg\mathcal{C} \vee \mathcal{B}}$	$\dfrac{\mathcal{M} \wedge \mathcal{K} \vdash \mathcal{N}}{\mathcal{M} \vdash \neg\mathcal{K} \vee \mathcal{N}}$

Regole di Inferenza proposizionali

Regole per la composizione (Formule di processo)

$(\circ\diamond)$ $$\frac{}{\mathcal{A} \circ \diamond \dashv\vdash \mathcal{A}}$$

$(\circ\neg\diamond)$ $$\frac{}{\mathcal{A} \circ \neg\diamond \vdash \neg\diamond}$$

$(\mathrm{A}\ \circ)$ $$\frac{}{\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C}) \dashv\vdash (\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C}}$$

$(\mathrm{X}\ \circ)$ $$\frac{}{\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \circ \mathcal{A}}$$

$(\circ \vdash)$ $$\frac{\mathcal{A}' \vdash \mathcal{B}' \quad \mathcal{A}'' \vdash \mathcal{B}''}{\mathcal{A}' \circ \mathcal{A}'' \vdash \mathcal{B}' \circ \mathcal{B}''}$$

$(\circ\vee)$ $$\frac{}{(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \circ \mathcal{C} \vee \mathcal{B} \circ \mathcal{C}}$$

$(\circ\phi)$ $$\frac{}{\mathcal{A}' \circ \mathcal{A}'' \vdash (\mathcal{A}' \circ \mathcal{B}'') \vee (\mathcal{B}' \circ \mathcal{A}'') \vee (\neg\mathcal{B}' \circ \neg\mathcal{B}'')}$$

$(\circ \triangleright)$ $$\frac{\mathcal{A} \circ \mathcal{C} \vdash \mathcal{B}}{\overline{\mathcal{A} \vdash \mathcal{C} \triangleright \mathcal{B}}}$$

Regole di Inferenza proposizionali

Regole per la composizione (Formule di membrana)

(|0) $\dfrac{}{\mathcal{M}|\mathbf{0} \dashv\vdash \mathcal{M}}$

(|¬0) $\dfrac{}{\mathcal{M}|\neg\mathbf{0} \vdash \neg\mathbf{0}}$

(A |) $\dfrac{}{\mathcal{M}|(\mathcal{N}|\mathcal{K}) \dashv\vdash (\mathcal{M}|\mathcal{N})|\mathcal{K}}$

(X |) $\dfrac{}{\mathcal{M}|\mathcal{N} \vdash \mathcal{N}|\mathcal{M}}$

(| ⊢) $\dfrac{\mathcal{M}' \vdash \mathcal{N}' \quad \mathcal{M}'' \vdash \mathcal{N}''}{\mathcal{M}'|\mathcal{M}'' \vdash \mathcal{N}'|\mathcal{N}''}$

(|∨) $\dfrac{}{(\mathcal{M} \vee \mathcal{N})|\mathcal{K} \vdash \mathcal{M}|\mathcal{K} \vee \mathcal{N}|\mathcal{K}}$

(| ||) $\dfrac{}{\mathcal{M}'|\mathcal{M}'' \vdash (\mathcal{M}'|\mathcal{N}'') \vee (\mathcal{N}'|\mathcal{M}'') \vee (\neg\mathcal{N}'|\neg\mathcal{N}'')}$

(| ▶) $\dfrac{\mathcal{M}|\mathcal{K} \vdash \mathcal{N}}{\mathcal{M} \vdash \mathcal{K} \blacktriangleright \mathcal{N}}$ (double line)

Regole di Inferenza proposizionali

Regole per la locazione

$$(\mathcal{M}\llparenthesis\rrparenthesis\neg\diamond) \qquad \frac{\mathcal{A} \vdash \neg\diamond}{\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A}\rrparenthesis \vdash \neg\diamond}$$

$$(\mathcal{M}\llparenthesis\rrparenthesis\neg\diamond) \qquad \frac{\mathcal{M} \vdash \neg\mathbf{0}}{\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A}\rrparenthesis \vdash \neg\diamond}$$

$$(\mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis) \qquad \frac{}{\mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis \dashv\vdash \diamond}$$

$$(\mathcal{M}\llparenthesis\rrparenthesis\neg\circ) \qquad \frac{}{\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A}\rrparenthesis \vdash \neg(\neg\diamond \circ \neg\diamond)}$$

$$(\mathcal{M}\llparenthesis\rrparenthesis \vdash) \qquad \frac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \quad \mathcal{M} \vdash \mathcal{N}}{\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A}\rrparenthesis \vdash \mathcal{N}\llparenthesis\mathcal{B}\rrparenthesis}$$

$$(\mathcal{M}\llparenthesis\rrparenthesis\wedge) \qquad \frac{}{\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A}\rrparenthesis \wedge \mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{B}\rrparenthesis \vdash \mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}\rrparenthesis}$$

$$(\mathcal{M}\llparenthesis\rrparenthesis\vee) \qquad \frac{}{\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A} \vee \mathcal{B}\rrparenthesis \vdash \mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A}\rrparenthesis \vee \mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{B}\rrparenthesis}$$

$$(\mathcal{M}\llparenthesis\rrparenthesis@) \qquad \frac{\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A}\rrparenthesis \vdash \mathcal{B}}{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}@\mathcal{M}}$$

$$(\neg@) \qquad \frac{}{\mathcal{A}@\mathcal{M} \dashv\vdash \neg(\neg(\mathcal{A})@\mathcal{M})}$$

Regole di Inferenza proposizionali

Regole per le modalità spaziali e temporali (Formule di processo)

$(\Diamond)$	$\overline{\Diamond\mathcal{A} \dashv\vdash \neg\Box\neg\mathcal{A}}$	(✧)	$\overline{\text{✧}\mathcal{A} \dashv\vdash \neg\text{¤}\neg\mathcal{A}}$
$(\Box\ \mathrm{K})$	$\overline{\Box(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vdash \Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{B}}$	$(\text{¤}\ \mathrm{K})$	$\overline{\text{¤}(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vdash \text{¤}\mathcal{A} \Rightarrow \text{¤}\mathcal{B}}$
$(\Box\ \mathrm{T})$	$\overline{\Box\mathcal{A} \vdash \mathcal{A}}$	$(\text{¤}\ \mathrm{T})$	$\overline{\text{¤}\mathcal{A} \vdash \mathcal{A}}$
$(\Box\ 4)$	$\overline{\Box\mathcal{A} \vdash \Box\Box\mathcal{A}}$	$(\text{¤}\ 4)$	$\overline{\text{¤}\mathcal{A} \vdash \text{¤}\text{¤}\mathcal{A}}$
$(\Box\mathbf{T})$	$\overline{\mathbf{T} \vdash \Box\mathbf{T}}$	$(\text{¤}\mathbf{T})$	$\overline{\mathbf{T} \vdash \text{¤}\mathbf{T}}$
$(\Box\ \vdash)$	$\dfrac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}}{\Box\mathcal{A} \vdash \Box\mathcal{B}}$	$(\text{¤}\ \vdash)$	$\dfrac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}}{\text{¤}\mathcal{A} \vdash \text{¤}\mathcal{B}}$
$(\Diamond\mathcal{M}\llparenthesis\rrparenthesis)$	$\overline{\mathcal{M}\llparenthesis\Diamond\mathcal{A}\rrparenthesis \vdash \Diamond\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A}\rrparenthesis}$	$(\text{✧}\mathcal{M}\llparenthesis\rrparenthesis)$	$\overline{\mathcal{M}\llparenthesis\text{✧}\mathcal{A}\rrparenthesis \vdash \text{✧}\mathcal{A}}$
$(\Diamond\circ)$	$\overline{\Diamond\mathcal{A} \circ \Diamond\mathcal{B} \vdash \Diamond(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})}$	$(\text{✧}\circ)$	$\overline{\text{✧}\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \vdash \text{✧}(\mathcal{A} \circ \mathbf{T})}$
$(\text{✧}\Diamond)$	$\overline{\text{✧}\Diamond\mathcal{A} \vdash \Diamond\text{✧}\mathcal{A}}$		

Regole di Inferenza proposizionali

Regole per le modalità spaziali e temporali (Formule di membrana)

$(\langle\alpha\rangle)$ $\quad \dfrac{}{\langle\alpha\rangle\mathcal{M} \vdash \neg\,[\alpha]\,\neg\mathcal{M}}$

$([\alpha]\ \mathsf{K})$ $\quad \dfrac{}{[\alpha]\,(\mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{N}) \vdash [\alpha]\,\mathcal{M} \Rightarrow [\alpha]\,\mathcal{N}}$

$([\alpha] \vdash)$ $\quad \dfrac{\mathcal{M} \vdash \mathcal{N}}{[\alpha]\,\mathcal{M} \vdash [\alpha]\,\mathcal{N}}$

Regole di Inferenza proposizionali

Regole per le reazioni

$$(\langle\circlearrowright\rangle) \qquad \frac{}{\langle\circlearrowright_n\rangle\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A}\rrparenthesis \circ \langle\circlearrowright_n^{\perp}(\mathcal{K})\rangle\mathcal{N}\llparenthesis\mathcal{B}\rrparenthesis \vdash \Diamond\mathcal{N}\llparenthesis\mathcal{K}\llparenthesis\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A}\rrparenthesis\rrparenthesis \circ \mathcal{B}\rrparenthesis}$$

$$(\langle\circlearrowleft\rangle) \qquad \frac{}{\langle\circlearrowleft_n^{\perp}\rangle\mathcal{N}\llparenthesis\langle\circlearrowleft_n\rangle\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A}\rrparenthesis \circ \mathcal{B}\rrparenthesis \vdash \Diamond\mathcal{M}|\mathcal{N}\llparenthesis\mathcal{B}\rrparenthesis \circ \mathcal{A}}$$

$$(\langle\circledcirc\rangle) \qquad \frac{}{\langle\circledcirc(\mathcal{N})\rangle\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{A}\rrparenthesis \vdash \Diamond\mathcal{M}\llparenthesis\mathcal{N}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis \circ \mathcal{A}\rrparenthesis}$$

Validità predicativa

Quando si considerano i quantificatori abbiamo bisogno di espandere la nozione di validità

$$\mathbf{vld}(\mathcal{A}) \triangleq \forall \phi \in fv(\mathcal{A}) \rightarrow \Lambda . \forall P \in \Pi . P \vDash \mathcal{A}_{\phi}$$

Regole di Inferenza predicative

Regole per il quantificatore universale

$$(\forall\text{-L}) \quad \frac{\mathcal{A}\{x \leftarrow \eta\} \vdash \mathcal{B}}{\forall x.\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}} \quad (\eta \text{ nome o variabile})$$

$$(\forall\text{-R}) \quad \frac{\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}}{\mathcal{A} \vdash \forall x.\mathcal{B}} \quad \text{dove } x \notin fv(\mathcal{A})$$

Esempio di derivazione di una formula

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle\circlearrowright^{\perp}_{n}\rangle\llparenthesis\langle\circlearrowright_{n}\rangle\llparenthesis\diamond\rrparenthesis\rrparenthesis \vdash \Diamond(\mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis \circ \mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis)}\,(\langle\circlearrowright\rangle)}{}}{}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis \vdash \diamond}\,(\mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis)
\quad
\dfrac{}{\mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis \vdash \diamond}\,(\mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis)
}{\mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis \circ \mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis \vdash \diamond \circ \diamond}\,(\circ\vdash)
\quad
\dfrac{}{\diamond \circ \diamond \vdash \diamond}\,(\circ\diamond)
}{\mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis \circ \mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis \vdash \diamond}\,(\text{trans})
}{\Diamond(\mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis \circ \mathbf{0}\llparenthesis\diamond\rrparenthesis) \vdash \Diamond\diamond}\,(\diamond\vdash)
}{\langle\circlearrowright^{\perp}_{n}\rangle\llparenthesis\langle\circlearrowright_{n}\rangle\llparenthesis\diamond\rrparenthesis\rrparenthesis \vdash \Diamond\diamond}\,(\text{trans})
}{\forall x.\langle\circlearrowright^{\perp}_{x}\rangle\llparenthesis\langle\circlearrowright_{x}\rangle\llparenthesis\diamond\rrparenthesis\rrparenthesis \vdash \Diamond\diamond}\,(\forall\text{-L})
$$

Uguaglianza tra nomi

È possibile codificare l'uguaglianza tra nomi nella logica

$$\eta = \mu \triangleq \langle\!\langle \circlearrowleft_\eta \rangle\!\rangle (\!(\mathbf{T})\!) @ \langle\!\langle \circlearrowleft_\mu \rangle\!\rangle$$

Proposizione (Uguaglianza tra nomi)

$\forall \phi \in fv(\eta) \cup fv(\mu) \rightarrow \Lambda. \forall P \in \Pi. P \vDash (\eta = \mu)_\phi \quad \Leftrightarrow \quad \phi(\eta) = \phi(\mu)$

Dalla validità proposizionale a quella predicativa

Usando l'uguaglianza tra nomi possiamo estendere la validità proposizionale alla validità predicativa

Proposizione (Lifting propositional validity)

Se $\mathcal{A}$ è chiusa e valida, allora per ogni funzione iniettiva $\psi \in fn(\mathcal{A}) \to \vartheta$ dai nomi alle variabili, la formula $(dfn(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A})_\psi$ è valida, dove $dfn(\mathcal{A})$ è la congiunzione di tutte le disuguaglianze $\neg n = m$ tali che n, m sono nomi distinti in $fn(\mathcal{A})$.

Esempio

Proposizione valida: $[\circlearrowleft_n]\,\mathcal{M} \Rightarrow \neg\langle\circlearrowleft_m\rangle\mathcal{M}$

Predicato valido: $\neg x = y \Rightarrow ([\circlearrowleft_x]\,\mathcal{M} \Rightarrow \neg\langle\circlearrowleft_y\rangle\mathcal{M})$

Risultati ottenuti

- Fresh renaming preserves $\equiv$ (for membranes)
- Fresh renaming preserves $\equiv$ (for processes)
- Fresh remaming preserves $\xrightarrow{\alpha}$
- Fresh renaming preserves ➡
- Fresh renaming preserves $\downarrow$
- Fresh remaming preserves $\models$ (for membranes)
- Fresh remaming preserves $\models$ (for processes)
- Fresh renaming preserves validity
- Injective complete renaming preserves validity

Contributi originali

- Definizione di una logica per le membrane
- Riorganizzazione e verifica delle tavole di regole
- Risultati Ambient Logic $\rightarrow$ Risultati Brane Logic

Sviluppi futuri

- Definire di una sottologica decidibile
- Sviluppare tecniche di Model Checking
- Verificare la completezza della logica
- Estendere la logica al Brane Calcolo con molecole e complessi di molecole
- Estendere il calcolo con la *restrizione* e la logica con i costrutti *hide* e *reveal*
- Estendere la logica con formule ricorsive

Bibliografia

B. Alberts, D. Bray, J. Lewis, M. Raff, K. Roberts, and J. D. Watson.
Molecular biology of the cell.
Garland, second edition, 1989.

Luca Cardelli.
Brane calculi.
In Vincent Danos and Vincent Schachter, editors, *CMSB*, volume 3082 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 257–278. Springer, 2004.

Luca Cardelli and Andrew D. Gordon.
Anytime, anywhere, modal logics for mobile ambients (extended abstract).

Luca Cardelli and Andrew D. Gordon.
Mobile ambients.
Theor. Comput. Sci., 240(1):177–213, 2000.

Luca Cardelli and Andrew D. Gordon.
Ambient logic, 2003.